Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің 8-сынып оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

+CD

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі ұсынған

КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С64

Солтан Г. Н. және т. б.
С64 Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 8-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030, 2018. – 216 б.: ил.

ISBN 978-601-317-343-6

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geomk.php

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978-601-317-343-6

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз 5

7-сыныптағы геометрия курсын қайталау 7
Геометриялық фигуралар, олардың белгілері мен қасиеттері 7

I. Көпбұрыштар. Төртбұрыштарды зерттеу 20
1. Көпбұрыш. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы 21
2. Төртбұрыштың түрлері. Параллелограмм және оның қасиеттері 28
3. Параллелограмның белгілері 34
4. Тіктөртбұрыштың қасиеттері мен белгілері 39
5. Ромбтың қасиеттері мен белгілері 42
6. Шаршының қасиеттері мен белгілері 46
7. Трапецияның қасиеттері мен белгілері 50
8. Циркуль мен сызғыштың көмегімен төртбұрыштар салу 53
9. Фалес теоремасы 55
10. Үшбұрыштың орта сызығы 62
11. Трапецияның орта сызығы 66
12. Үшбұрыштың тамаша нүктелері 71
13. «Көпбұрыштар. Төртбұрыштарды зерттеу» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар 76

II. Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатыстар 80
14. Сүйір бұрыштың косинусы 81
15. Пифагор теоремасы және оған кері теорема 84
16. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары 90
17. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларының қасиеттері 95
18. Тригонометриялық тепе-теңдіктер 100
19. Тікбұрышты үшбұрыштарды шешу 102
20. «Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатыстар» тақырыбына есептер 107

III. Фигуралардың аудандары 113
21. Аудан түсінігі. Тіктөртбұрыштың ауданы 114
22. Параллелограмм мен үшбұрыштың аудандары 120
23. Дөңес төртбұрыштың ауданы 126
24. Трапецияның ауданы 129
25. «Фигуралардың аудандары» тақырыбына есептер 133

IV. Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі 138
26. Жазықтықтағы нүктелердің координаталары; кесіндінің ортасының координаталары. Екі нүктенің арақашықтығы 139
27. Жазықтықтағы сызықтардың теңдеулері. Түзудің теңдеулері 144
28. Шеңбердің теңдеуі 149
29. Координаталарды 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларын есептеуде қолдану 153
30. «Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі» тақырыбына есептер 157

8-сыныптағы геометрия курсын қайталау 161

Қосымша 166
Тангенстің 0°-тан 89°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі 166
Синус пен косинустың 0°-тан 90°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі 167
Жаттықтырғыш есептер 168

Жауаптар мен нұсқаулар 198

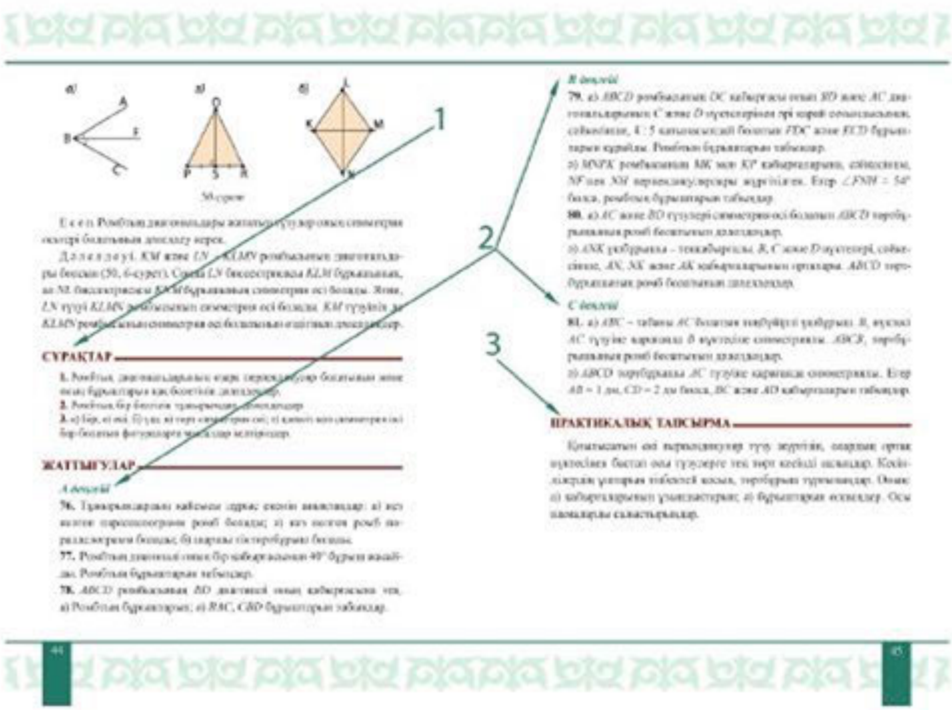
Пәндік көрсеткіш 213

Қосымша әдебиет тізімі 215

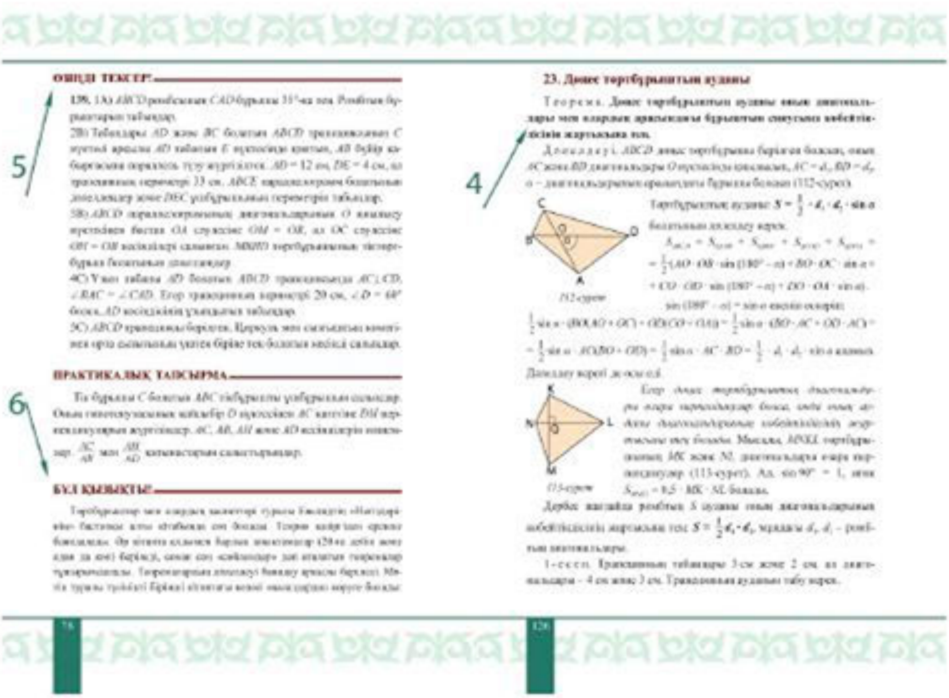
АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Осы оқу жылында сендер «Геометрия» пәнін оқуды жалғастырасыңдар. Аталмыш оқулықта 8-сыныпқа арналған геометрия курсының мазмұны баяндалады. Көптеген жаңа геометриялық ұғымдар және олардың қасиеттерімен танысасыңдар, бұрыштың тригонометриялық функциялары жайлы білетін боласыңдар, төртбұрыш және олардың түрлері мен қасиеттері, аудандары туралы білімдеріңді кеңейтесіңдер, координаталарға байланысты жаңа тарауды оқып-үйренесіңдер. Сонымен қатар, алгебраның геометрияда қолданылуына көп назар аударатын боласыңдар.

Бұл оқулықта теория кеңінен баяндалып, есептердің шығару тәсілдері берілген. Жаңа материалдың түсіндірмесінен кейін жаңа білімді қалай меңгергендеріңді тексеруге көмектесетін сұрақтар (1) берілген. Сонымен қатар, тәжірибелік іскерлік пен дағдыны қалыптастыру үшін күрделілігі бойынша А, В, С үш деңгейіне бөлінген жаттығулар (2) ұсынылады. Кейбір тармақтардың соңында жаңа материалды игеруге арналған практикалық тапсырмалар (3) берілген.



Анықтамалар, аксиомалар мен теоремалар, формулалар арнайы қаріппен (4) ерекшеленген. Тараулар бойынша білімді жүйелеу және жиынтық бағалауға дайындалу үшін «Өзіңді тексер!» айдарымен тапсырмалар (5) жеке тармақтарда берілген. Кітаптың соңында жаттығулардың жауаптары мен қиын есептерді шешуге нұсқаулар берілген. Әр тармақтың соңында «Бұл қызықты!» айдарымен тарихи деректер (6) ұсынылған.



Оқулықта Қазақстанның қорықтары, оның көрікті жерлері жайлы материалдар пайдаланылған және ғаламтордың көмегімен олар туралы білімдеріңді кеңейте аласыңдар.

Оқулық геометрияны оқып-білуде айнымас серіктерің болсын!

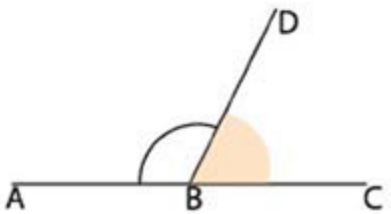
Сәттілік тілейміз!

Авторлар

7-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Геометриялық фигуралар, олардың белгілері мен қасиеттері

Сыбайлас бұрыштар

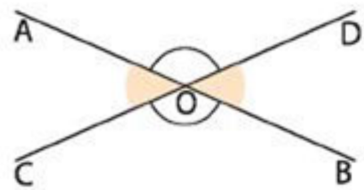


1-сурет

$\angle ABD + \angle DBC = 180°$

$\angle ABC$ – жазыңқы бұрыш

Вертикаль бұрыштар

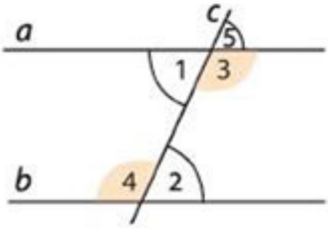


2-сурет

$\angle AOC = \angle DOB$

$\angle AOD = \angle COB$

Параллель түзулер және қиюшы



3-сурет

$\angle 1$ және $\angle 2$, $\angle 3$ және $\angle 4$ – ***ішкі айқыш бұрыштар***

$\angle 3$ және $\angle 2$, $\angle 1$ және $\angle 4$ – ***ішкі тұстас бұрыштар***

$\angle 5$ және $\angle 2$ – ***сәйкес бұрыштар***

Параллель түзулердің ***белгілері***

Егер $\angle 1 = \angle 2$, онда $a \parallel b$.

Егер $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, онда $a \parallel b$.

Егер $\angle 5 = \angle 2$, онда $a \parallel b$.

Параллель түзулердің ***қасиеттері***

Егер $a \parallel b$, онда $\angle 3 = \angle 4$.

Егер $a \parallel b$, онда $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

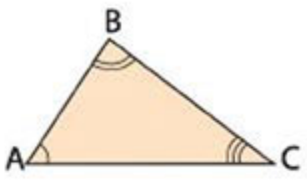
Егер $a \parallel b$, онда $\angle 5 = \angle 2$.

Үшбұрыш

$AC < AB + BC$

$BC < AB + AC$

$AB < BC + AC$



4-сурет

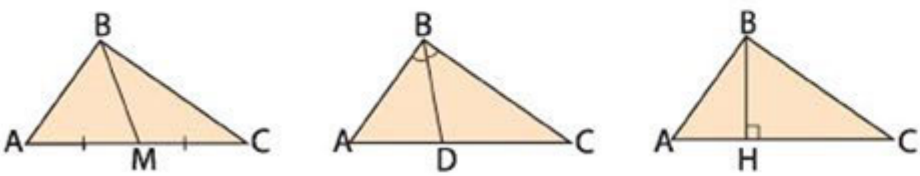
Үшбұрыштың ***ішкі бұрыштарының қосындысы***

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынас: үлкен бұрышқа қарсы үлкен қабырға жатады және, *керісінше*, үлкен қабырғаға қарсы үлкен бұрыш жатады.

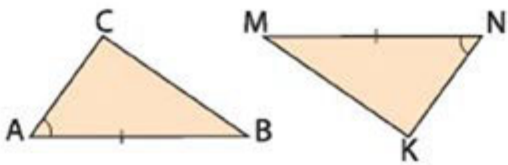
Үшбұрыштың

медианасы ***биссектрисасы*** ***биіктігі***



5-сурет

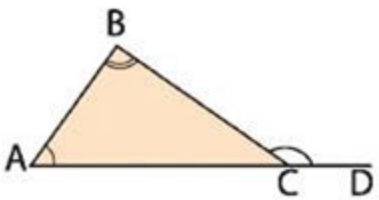
Тең үшбұрыштар

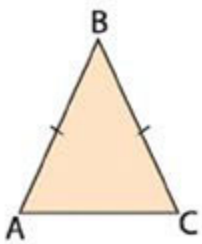
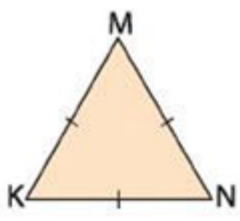
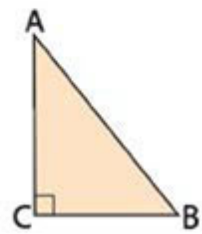


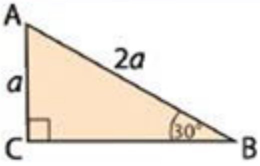
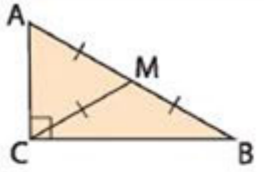
6-сурет

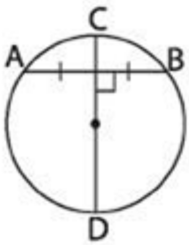
Тең үшбұрыштарда тең бұрыштарға қарсы тең қабырғалар жатады және, *керісінше*, тең қабырғаларға қарсы тең бұрыштар жатады.

Егер $\Delta ABC = \Delta NMK$, онда $\angle A = \angle N, \angle C = \angle K, \angle B = \angle M$, $CB = MK, AB = MN, AC = KN$.

Үшбұрыштар теңдігінің *белгілері:*	***Тікбұрышты*** үшбұрыштар теңдігінің белгілері:
• екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша; • бір қабырғасы мен оған іргелес жатқан екі бұрышы бойынша; • үш қабырғасы бойынша.	1) екі катеті бойынша; 2) катеті мен сүйір бұрышы бойынша; 3) катеті мен гипотенузасы бойынша; 4) гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша.
$\angle BCD$ – ΔABC-ның ***сыртқы бұрышы***  *7-сурет*	***Қасиеті:*** үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған сыбайлас емес үшбұрыштың ішкі екі бұрышының қосындысына тең. $\angle BCD = \angle A + \angle B$

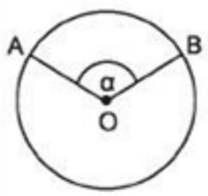
Теңбүйірлі үшбұрыш	***Теңқабырғалы*** үшбұрыш	***Тікбұрышты*** үшбұрыш
 *8-сурет*	 *9-сурет*	 *10-сурет*
$AB = BC$ – бүйір қабырғалары, AC – табаны	$KM = MN = KN$ $\angle K = \angle M = \angle N = 60°$	AC, CB – катеттер AB – гипотенуза

Теңбүйірлі үшбұрыштың ***белгілері***	*Теңбүйірлі үшбұрыштың* ***қасиеттері***
• Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, онда ол үшбұрыш – теңбүйірлі. • Егер үшбұрыштың биссектрисасы мен биіктігі; *немесе* биіктігі мен медианасы; *немесе* биссектрисасы мен медианасы беттессе, онда ол үшбұрыш – теңбүйірлі.	• Теңбүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең. • Теңбүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген медиана оның әрі биссектрисасы, әрі биіктігі болады.
 *11-сурет* Тікбұрышты үшбұрыштың 30° бұрышына қарсы жатқан катеті гипотенузаның жартысына тең болады және, *керісінше*, егер катет гипотенузаның жартысына тең болса, онда ол 30° бұрышқа қарсы жатады.	 *12-сурет* Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен жүргізілген медиана гипотенузаның жартысына тең болады және, *керісінше*, егер үшбұрыштың қабырғаларының біріне жүргізілген медиана осы қабырғаның жартысына тең болса, онда үшбұрыш тікбұрышты болады.



13-сурет

AB – хорда, *CD* – диаметр. Хордаға перпендикуляр диаметр оны екі тең бөлікке бөледі. Егер диаметр болмайтын хорданы диаметр екіге тең бөлетін болса, онда ол хордаға перпендикуляр болады.



14-сурет

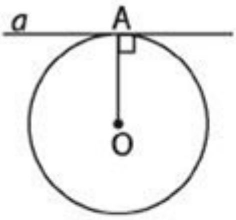
Доғаның градустық өлшемі оған сәйкес центрлік бұрыштың градустық өлшеміне тең:

$$\smile AB = \angle AOB.$$

Тең доғалардың градустық өлшемдері тең болады.

Тең хордалар тең доғаларды кереді және, *керісінше*, егер доғалар тең болса, оларды керетін хордалар да тең болады.

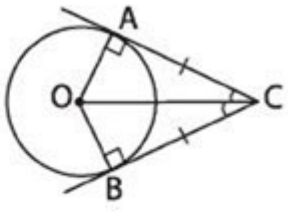
Шеңбердің ***жанамасы***



15-сурет

Жанаманың ***қасиеті:*** егер түзу шеңбермен жанасса, онда ол жанасу нүктесіне жүргізілген радиусқа перпендикуляр болады.

Жанаманың ***белгісі:*** егер түзу радиустың шеңберге тиісті ұшы арқылы өтсе және оған перпендикуляр болса, онда ол түзу шеңберге жанама болады.

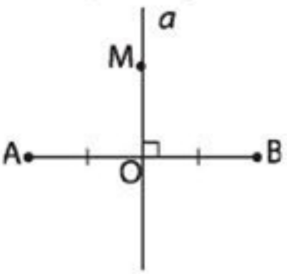


16-сурет

Шеңберден тыс жатқан *C* нүктесі арқылы шеңберге екі жанама жүргізілсе, онда жанамалардың *CA* және *CB* кесінділері тең болады, ал шеңбердің центрі *ACB* бұрышының биссектрисасында жатады.

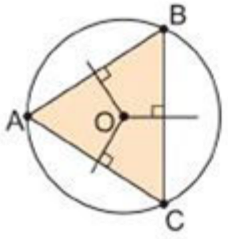
Кесіндінің

орта перпендикуляры



17-сурет

Егер нүкте кесіндіге тұрғызылған орта перпендикулярда жатса, онда ол кесіндінің ұштарынан бірдей қашықтықта орналасады және, *керісінше*, егер нүкте кесіндінің ұштарынан бірдей қашықтықта орналасса, онда ол кесіндінің орта перпендикулярында жатады.

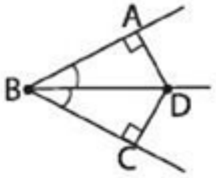


18-сурет

Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярларының қиылысу нүктесі осы ***үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі*** болады.

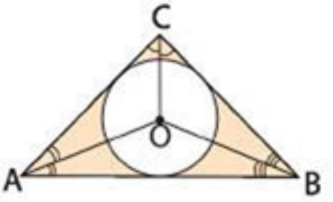
Бұрыш биссектрисасы

нүктелерінің қасиеті



19-сурет

Егер нүкте бұрыштың биссектрисасында жатса, онда ол бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта болады және, *керісінше*, егер нүкте бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта болса, онда ол осы бұрыштың биссектрисасында жатады.



20-сурет

Үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесі осы үшбұрышқа ***іштей сызылған шеңбердің центрі*** болады.

СҰРАҚТАР

1. Қандай бұрыштар сыбайлас бұрыштар деп аталады? Олардың қандай қасиеттері бар?

2. Қандай бұрыштар вертикаль бұрыштар деп аталады? Олардың қандай қасиеттері бар?

3. Қандай үшбұрыш: а) теңбүйірлі; ә) тікбұрышты деп аталады? Олардың қабырғалары қалай аталады?

4. Тікбұрышты үшбұрыш: а) теңбүйірлі; ә) теңқабырғалы болуы мүмкін бе?

5. Үшбұрыштың биіктігі, медианасы, биссектрисасы дегеніміз не?

6. Үшбұрыштың биіктігі оның қабырғасына тең болуы мүмкін бе?

7. Үшбұрыштың бір төбесінен жүргізілген медианасы, биіктігі мен биссектрисасы беттесуі мүмкін бе?

8. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттерін атаңдар.

9. Үшбұрыштың теңбүйірлі екенін қандай белгілері бойынша анықтауға болады?

10. Екі үшбұрыштың тең екенін қандай белгілері бойынша анықтауға болады?

11. Тікбұрышты үшбұрыш теңдігінің белгілерін атаңдар.

12. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы неге тең?

13. Тікбұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышының қосындысы неге тең? Егер олардың бірі α-ға тең болса, екіншісі неге тең?

14. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы дегеніміз не? Оның қандай қасиеті бар?

15. Қабырғалары a, b, c кесінділеріне тең болатын үшбұрыш бар болуы үшін бұл кесінділердің қандай қасиеттері болуы керек?

16. Қандай түзулер: а) параллель; ә) перпендикуляр деп аталады?

17. Айқыш бұрыштар және ішкі тұстас бұрыштар дегеніміз не?

18. Түзулердің параллель екенін қандай белгілері бойынша анықтауға болады?

19. Параллель түзулердің қасиеттерін атаңдар.

20. Түзу мен шеңбер қалай орналасуы мүмкін?

21. Егер шеңбердің радиусы 4 см, ал центрінен түзуге дейінгі қашықтық: а) 3 см; ә) 4 см; б) 5 см болса, онда түзу мен шеңбердің қанша ортақ нүктелері болуы мүмкін?

22. Түзудің шеңберге жанама екенін қандай белгісі бойынша анықтауға болады?

23. Шеңберде жататын нүкте арқылы оған қанша жанама жүргізуге болады? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

24. Бір нүктеден шеңберге жүргізілген екі жанаманың қандай қасиеттері болады?

25. Шеңбердің хордасы дегеніміз не? Радиусқа перпендикуляр хорданың қандай қасиеті бар? Осы қасиетке кері ұйғарымды тұжырымдаңдар. Бұл тұжырым дұрыс па?

26. Шеңбердің доғасы немен өлшенеді? Жартышеңбердің градустық өлшемі неге тең?

27. Шеңбердің радиусына тең хорда керетін доғаның градустық өлшемі неге тең?

28. Қандай екі шеңбер жанасатын шеңберлер деп аталады? Мұндай шеңберлердің қанша ортақ жанамасы болуы мүмкін?

29. а) Берілген нүктеден; ә) кесіндінің ұштарынан; б) бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта жататын нүктелердің геометриялық орны не болады?

30. Қандай нүкте: а) үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің; ә) үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың бірі 48°-қа тең. Қалған бұрыштарды табыңдар.

2. ABD және DBC бұрыштары – сыбайлас, BM сәулесі – ABD бұрышының биссектрисасы және де ABM бұрышы DBC бұрышынан 30°-қа кем. ABD бұрышын табыңдар.

3. Өзара параллель AB және CD түзулерін MN түзуі қияды, $M \in AB$, $N \in CD$, $\angle AMN = 55°$. $\angle CNM$ және $\angle DNM$ неге тең?

4. Екі параллель түзуді үшінші түзумен қиғанда 8 бұрыш пайда болды және ішкі тұстас бұрыштардың қатынасы 4 : 8 қатынасындай. Пайда болған барлық бұрыштардың градустық өлшемдерін табыңдар.

В деңгейі

5. MNK үшбұрышының биссектрисаларының қиылысу нүктесінен MK қабырғасына параллель және MN қабырғасын A нүктесінде, ал NK қабырғасын B нүктесінде қиятын түзу жүргізілген. $AB = MA + KB$ болатынын дәлелдеңдер.

6. Егер теңбүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтары 5 см және 11 см болса, табаны мен бүйір қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

7. Егер теңбүйірлі үшбұрыштың: а) периметрі 36 см және табаны бүйір қабырғасының 1,6 бөлігіне тең болса; ә) периметрі 40 см, ал бір қабырғасының ұзындығы 12 см болса, онда оның қабырғаларын табыңдар.

8. Табаны AC, B төбесінің сыртқы бұрышы 112°-ка тең болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

9. ABC теңбүйірлі үшбұрышының AC табанына BM медианасы жүргізілген, $\angle MBC = 40°$. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

10. ABC үшбұрышында $\angle C = 30°$, ал A төбесінің сыртқы бұрышы 120°-ка тең. Үшбұрыштың белгісіз бұрыштарын табыңдар.

11. ABC үшбұрышының BM медианасы жүргізілген, $AB = BM$ және $\angle ABM = 70°$. BMC бұрышын табыңдар.

12. ABC үшбұрышында $\angle A = \angle B$, ал AM биіктігі BC қабырғасын қақ бөледі. Егер $CM = 3{,}5$ см болса, AB-ның ұзындығын табыңдар.

13. M нүктесі AB кесіндісінің орта перпендикулярында жатыр. Егер $AM = 4{,}5$ см болса, MB-ның ұзындығын табыңдар.

14. Табаны BC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышында $\angle A = 50°$. Оның AC қабырғасына AB қабырғасын D нүктесінде қиятын орта перпендикуляр тұрғызылған. DCA бұрышын табыңдар.

15. Теңбүйірлі ABC және ABD үшбұрыштарының табандары ортақ. CD және AB кесінділері O нүктесінде қиылысады. а) $\angle CAD = \angle CBD$; ә) $AO = OB$ болатынын дәлелдеңдер.

16. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың екі тең медианасы болатынын дәлелдеңдер.

ә) Тең үшбұрыштардың тең бұрыштарының төбелерінен жүргізілген биссектрисаларының тең болатынын дәлелдеңдер.

17. Салтанат берілген A бұрышын қақ бөл деген тапсырма алды. Тапсырманы орындау үшін ол бұрыштың бір қабырғасына AB мен AD ($AD > AB$) кесінділерін, ал екінші қабырғасына оларға сәйкесінше тең болатын AC мен AK кесінділерін өлшеп салды. BK мен DC кесінділерін жүргізіп, олардың қиылысу нүктесін O деп белгіледі де, AO сәулесін жүргізді. Осы сәуле ізделінді сәуле бола ма?

18. а) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының бірі екіншісінен 50 %-ға артық. Үшбұрыштың сүйір бұрыштарын табыңдар. ә) ABC тікбұрышты үшбұрышының $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 18$ см. AC қабырғасын табыңдар.

19. Қазақстанның Ұлытау ұлттық табиғи саябағында ерекше ағаштар өседі. Есепті шығарсаңдар, оның жауабының сандық шамасы арқылы Шренк шыршасының қандай биіктікке жететінін (а) және неше жыл өмір сүретінін (ә) білетін боласыңдар.

Шренк шыршасы

а) Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі бұрышының 62,5 %-на тең болатын табанындағы бұрышын табыңдар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың 60°-қа тең бұрышына іргелес жатқан катеті мен гипотенуза ұзындықтарының қосындысы 900 мм-ге тең. Гипотенузаның ұзындығын табыңдар.

20. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 120°-қа, ал табаны 16 см-ге тең. Үшбұрыштың сүйір бұрышының төбесінен жүргізілген биіктігін табыңдар.

21. b түзуінен 7 см қашықтықта жатқан A нүктесінен AB перпендикуляры және AC көлбеуі жүргізілген (B және C нүктелері b түзуінде жатады). Егер $\angle CAB = 45°$ болса, BC-ның ұзындығын табыңдар.

22. C бұрышы тік болатын ABC тікбұрышты үшбұрышының CM медианасының ұзындығы 4 см. AB-ны табыңдар.

23. ABC үшбұрышының CM медианасы AB қабырғасынан екі есе кіші. C бұрышын табыңдар.

24. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 10 см. Осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

25. Тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің r радиусы $r = \frac{a+b-c}{2}$ формуласымен есептелетінін дәлелдеңдер, мұндағы a және b – катеттер, c – гипотенуза.

26. Гипотенузасы 8 см, катеттерінің қосындысы 11 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы неге тең?

27. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының ұзындығы 20 см, ал оған іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см. Егер оның үлкен катетінің ұзындығы кіші катеті мен гипотенузасының арифметикалық ортасына тең болса, тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің ұзындықтарын табыңдар.

28. Теңқабырғалы үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің радиусы 2 см болса, оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы неге тең?

29. ABC үшбұрышында $\angle B = 40°$. O – үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі, AOC бұрышын табыңдар.

30. Егер бұрыштың ішінде жатқан нүкте оның қабырғаларынан бірдей қашықтықта болса, онда ол осы бұрыштың биссектрисасында жататынын дәлелдеңдер. Кері ұйғарымды тұжырымдап, дәлелдеңдер.

31. Центрі O нүктесі болатын шеңбердің C нүктесі арқылы шеңберге CB жанамасы мен CA хордасы жүргізілген, $\angle ACB = 48°$. AOC бұрышын табыңдар.

32. Центрі O нүктесі болатын шеңберге M нүктесі арқылы MA және MB жанамалары жүргізілген (A және B – жанасу нүктелері). Егер: а) $OM = 8$ см және шеңбердің радиусы 4 см; ә) $\angle AMB = 84°$ болса, AOB бұрышын табыңдар.

33. а) Егер шеңбердің AB хордасына сәйкес доға 62° болса, осы хорда мен AC диаметрінің арасындағы бұрышты табыңдар.

ә) Шеңбердің екі нүктесі оны екі доғаға бөледі. Егер осы нүктеге жүргізілген радиустардың арасындағы бұрыш 110° болса, доғалардың градустық өлшемдерін табыңдар.

С деңгейі

34. а) Сағат тілінің минут сайын сызатын;
ә) минутына 45 айналым жасайтын дөңгелектің секунд сайын сызатын;
б) Жер экваторы әрбір нүктесінің осьті айнала қозғалып, минут сайын сызатын доғасының градустық өлшемі қандай?

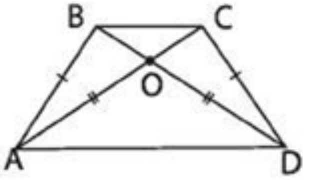
35. Радиусы 5 см, центрі O нүктесі болатын шеңберге M нүктесі арқылы MA және MB жанамалары жүргізілген (A және B – жанасу нүктелері). Шеңбердің үлкен AB доғасында C нүктесі белгіленген. Егер $AM = 5$ см болса, AB және ACB доғаларының градустық өлшемдерін табыңдар.

36. Бұрыштары 40° және 50° болатын үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Жанасу нүктелері арқылы бөлінген доғалардың градустық өлшемдерін табыңдар.

37. Берілген гипотенузасы бойынша теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш салыңдар.

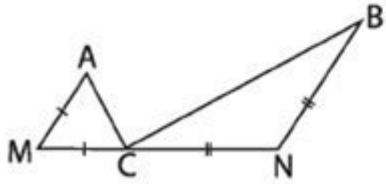
38. ABC – тікбұрышты үшбұрыш, $\angle C = 90°$, CD – биіктігі. ACD және CDB үшбұрыштарының сәйкес тең бұрыштары бар болатынын дәлелдеңдер.

39. 21-суретте $AB = CD$, $AC = BD$. а) AOD және BOC үшбұрыштарының сәйкес тең бұрыштары бар болатынын; ә) $BC \parallel AD$ болатынын дәлелдеңдер.



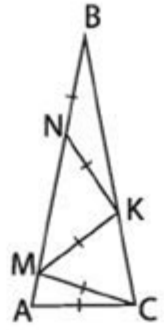
21-сурет

40. 22-суреттегі $AM \parallel BN$, $AM = MC$, $CN = NB$. $\angle ACB = 90°$ болатынын дәлелдеңдер.



22-сурет

41. Теңбүйірлі ABC үшбұрышының бүйір қабырғаларында $BN = NK = KM = MC = AC$ болатындай етіп M, N және K нүктелері белгіленген (23-сурет). B бұрышын табыңдар.



23-сурет

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Бесбұрыш тәрізді жер телімін елестетіңдер. Оның кез келген екі пункттің арасын бесбұрыштың шегарасын басып өтпейтін түзу жолмен жүріп өтуге болатын болсын. Дәптерлеріңе осы жер телімінің жобалы сызбасын салыңдар. Транспортирмен бесбұрыштың барлық бұрышын өлшеп, олардың қосындысын табыңдар.

I. КӨПБҰРЫШТАР. ТӨРТБҰРЫШТАРДЫ ЗЕРТТЕУ

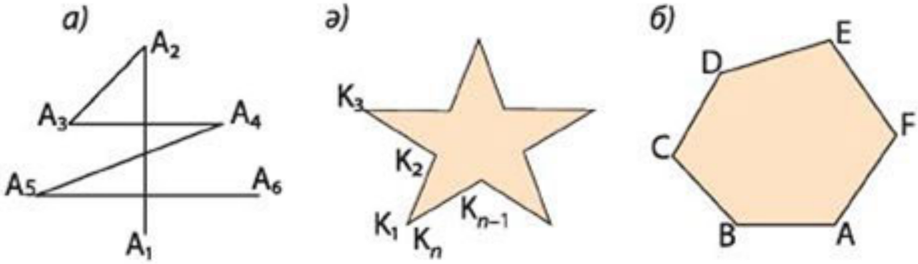
Тарауды оқу барысында

• көпбұрыш пен оның сыртқы бұрышының, параллелограмм, тіктөртбұрыш, шаршы, ромб, трапеция мен оның элементтерінің, үшбұрыш пен трапецияның орта сызықтарының анықтамаларын;
• төртбұрыштардың түрлерін анықтауды;
• көпбұрыштың бұрыштары қосындысының формуласын;
• параллелограм, тіктөртбұрыш, ромб, шаршы, трапецияның және үшбұрыш пен трапецияның орта сызықтарының қасиеттері мен белгілерін;
• Фалес теоремасын, пропорционал кесінділер туралы теореманы;
• үшбұрыштың тамаша төрт нүктесін және олардың қасиеттерін **білу керек.**

• көпбұрыштар мен олардың элементтерін кескіндей алу;
• көпбұрыштың бұрыштары қосындысының формуласын қорытып шығара алу;
• параллелограм, тіктөртбұрыш, ромб, шаршы, трапецияның және үшбұрыш пен трапецияның орта сызықтарының қасиеттері мен белгілерін дәлелдей алу;
• есепті шығару, дәлелдеу және салу есептерін шешу үшін параллелограм, тіктөртбұрыш, ромб, шаршы, трапецияның, үшбұрыш пен трапецияның орта сызықтарының қасиеттері мен белгілерін, Фалес теоремасы мен пропорционал кесінділер туралы теоремасын қолдана **алу керек**.

1. Көпбұрыш. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ *сынық сызығы* деп $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нүктелері мен оларды қосатын $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесінділерінен тұратын фигураны атайтынын еске сала кетейік (24, *а*-сурет). $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нүктелерін сынық сызықтың *төбелері* деп, ал $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесінділерін сынық сызықтың *буындары* деп атайды. A_1 мен A_n нүктелері – сынық сызықтың *ұштары*; екі буыны, мысалы, A_1A_2 мен A_2A_3 – сынық сызықтың *көршілес* буындары.



24-сурет

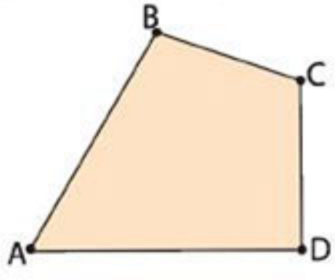
Егер сынық сызықтың көршілес екі буыны бір түзуде жатпаса, кез келген көршілес емес екі буынының ортақ нүктесі болмаса, ал сынық сызықтың ұштары беттессе, онда ол *жай тұйық сынық сызық* деп аталады (24, *ә*-сурет). Жай тұйық сынық сызық жазықтықты екі бөлікке бөледі, оның бірі (24, *ә*-суретте боялған) – *ішкі облысы*, ал екіншісі *сыртқы облысы* деп аталады.

Жай тұйық сынық сызық пен оның ішкі облысынан тұратын фигура *көпбұрыш* деп аталады (24, *ә*, *б*-суреттер). Мұндағы ішкі облыс *көпбұрыштың ішкі облысы* деп аталады, ал сынық сызықтың төбелері көпбұрыштың төбелері болады.

Көпбұрыш оның қабырғалары арқылы өтетін кез келген түзудің бір жағында жатса, онда ол *дөңес көпбұрыш* деп аталады (24, *б*-сурет). Дөңес көпбұрыштың әртүрлі екі нүктесін қосатын кез келген кесінді көпбұрышқа тиісті болады. Көпбұрыштың қандай да бір қабырғасын қамтитын түзу шегарасы болатын әртүрлі жартыжазықтыққа тиісті оның нүктелері бар болса, онда көпбұрыш *дөңес емес* деп аталады (24, *ә*-сурет). Дөңес емес көпбұрыштың әртүрлі екі нүктесін қосатын және оған тиісті емес кесінді әрдайым табылады.

Мектептегі геометрия курсында негізінен дөңес көпбұрыштардың қасиеттері оқытылады. Егер «дөңес» сөзі мәтінде қолданылмаса, онда дөңес көпбұрыш туралы айтылған деп түсіну керек.

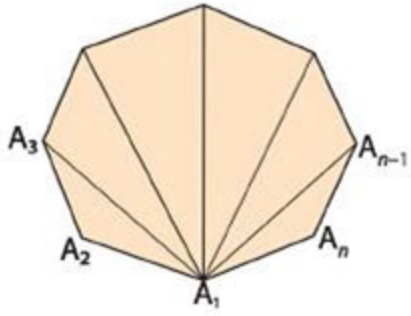
Төбелерінің саны мен қабырғаларының саны n-ге тең болатын көпбұрыш *n-бұрыш* деп аталады. Дөңес көпбұрыштың кез келген көршілес емес екі төбесін қосатын кесінді *көпбұрыштың диагоналі* деп аталады. Көпбұрыштың барлық қабырғаларының ұзындықтарының қосындысы оның *периметрі* деп аталады. Берілген төбедегі дөңес көпбұрыштың *бұрышы* деп осы төбеден шығатын іргелес екі қабырғасының арасындағы бұрышты айтады.



25-сурет

Төрт қабырғасы бар көпбұрыш ***төртбұрыш*** деп аталады. Көршілес емес AB мен CD, BC мен AD қабырғаларын $ABCD$ дөңес төртбұрышының *қарама-қарсы қабырғалары* деп атайды (25-сурет). $ABCD$ дөңес төртбұрышының A мен C, B мен D бұрыштарын оның *қарама-қарсы бұрыштары* деп атайды.

Теорема. **Дөңес n-бұрыштың бұрыштарының қосындысы $180° \cdot (n-2)$-ге тең.**



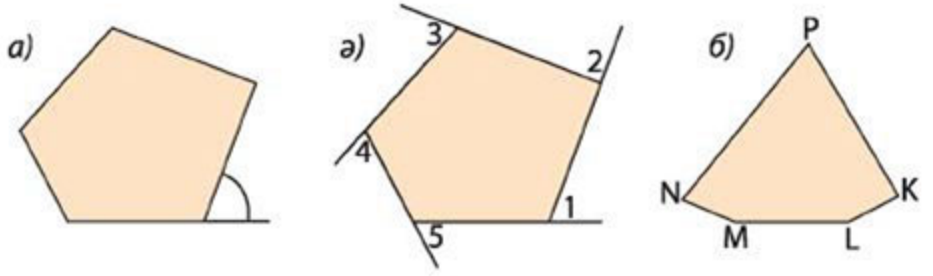
26-сурет

Дәлелдеуі. $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ n-бұрышын қарастырайық (26-сурет). $A_nA_1A_2, A_1A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_nA_1$ бұрыштары осы көпбұрыштың бұрыштары болады. Олардың қосындысын табайық. Ол үшін көпбұрыштың A_1 төбесін басқа төбелерімен диагональдары арқылы қосып, $n-2$ үшбұрышын аламыз. Сол үшбұрыш бұрыштарының қосындысы n-бұрыш бұрыштарының қосындысына тең болады.

Әрбір үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болғандықтан, $A_1A_2A_3 \dots A_n$ көпбұрышының бұрыштарының қосындысы $180° \cdot (n-2)$-ге тең болады. Теорема дәлелденді.

Бұл теореманы басқа әдіспен де дәлелдеуге болады, ол үшін көпбұрыштың ішінен кез келген нүкте алып, оны төбелерімен қосу керек (мұны өздігінен орындаңдар).

Көпбұрыштың бұрышымен сыбайлас бұрышты оның *сыртқы бұрышы* деп атайды (27, *а*-сурет). Дәлелденген теоремадан мынаны аламыз: **көпбұрыштың әрбір төбесінен бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болады:** $180° \cdot n - (n-2) \cdot 180° = 360°$ (27, *ә*-сурет).



27-сурет

1 - е с е п. Дөңес n-бұрыштың ең көп дегенде неше сүйір бұрышы бар болуы мүмкін?

Ш е ш у і. n-бұрыштың k сүйір бұрышы бар болсын, сонда әр төбесінен бір-бірден алынған сыртқы бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем болады. Әрбір сыртқы бұрышы 90°-тан артық болғандықтан, $k \leq 3$ болады. Осындай көпбұрыштың мысалы 27, *б*-суретте көрсетілген.

Ж а у а б ы. 3.

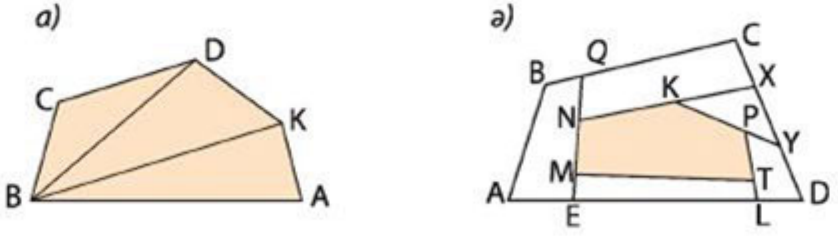
2 - е с е п. Бесбұрыштың әрбір қабырғасының ұзындығы оның қалған қабырғаларының ұзындықтарының қосындысынан кем болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Мысалы, $ABCDK$ дөңес бесбұрышы берілген және AB – оның басқаларынан ұзын қабырғасы болсын (28, *а*-сурет). Бесбұрыштың BK және BD диагональдарын жүргіземіз. Сонда үшбұрыштың теңсіздігі бойынша $AB < AK + BK$, $BK < KD + DB$, $DB < DC + CB$ болады.

Осы теңсіздіктердің оң жақтары мен сол жақтарын мүшелеп қосып, қосындыдан бірдей қосылғыштарды алып тастаймыз, сонда $AB < AK + KD + DC + CB$ шығады.

Демек, бесбұрыштың әрбір қабырғасының ұзындығы оның қалған қабырғаларының ұзындықтарының қосындысынан кем болады.

Осы тұжырым кез келген n-бұрыш үшін де дәл осылай дәлелденеді. Бұл есептің тұжырымы: *тұйықталмаған сынық сызықтың ұзындығы оның ұштарын қосатын кесіндінің ұзындығынан артық болады*.



28-сурет

3 - е с е п. Төртбұрыштың периметрі оның ішінде жатқан дөңес бесбұрыштың периметрінен артық болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ төртбұрышының ішінде $MNKPT$ бесбұрышы жатсын (28, ә-сурет). MN түзуі мен NK, KP, PT сәулелерін жүргізейік. Олардың төртбұрышпен қиылысу нүктелерін 28, ә-суретте көрсетілгендей белгілейік. Сынық сызықтың ұзындығы оның ұштарын қосатын кесіндінің ұзындығынан артық болатындықтан, мынаны аламыз:

$$EA + AB + BQ > \underline{EM} + MN + \underline{NQ}, \quad \underline{NQ} + QC + CX > NK + \underline{KX},$$
$$\underline{KX} + XY > KP + \underline{PY}, \quad \underline{PY} + YD + DL > PT + \underline{LT}, \quad \underline{LT} + LE + \underline{EM} > MT.$$

Осы теңсіздіктердің оң жақ және сол жақ бөліктерін мүшелеп қосып, қосындылардан бірдей қосылғыштарды алып тастап (олардың асты сызылған), мынаны аламыз:

$$AB + (BQ + QC) + (CX + XY + YD) + (DL + LE + EA) > MN + NK + KP + PT + MT, \text{ яғни } AB + BC + CD + DA > MN + NK + KP + PT + TM.$$

Осы тәсілмен кез келген көпбұрыштың периметрі оның ішінде жататын көпбұрыштың периметрінен артық болатынын дәлелдеуге болады.

СҰРАҚТАР

1. Жай тұйық сынық сызықтың анықтамасын беріңдер.
2. Қандай фигура көпбұрыш деп аталады?
3. Қандай көпбұрыш дөңес деп аталады? Мысал келтіріңдер.
4. Дөңес n-бұрыштың бұрыштарының қосындысын есептеу формуласын қорытып шығарыңдар.
5. Қандай фигура төртбұрыш деп аталады?
6. Төртбұрыштың төбелері, қабырғалары, периметрі дегеніміз не?
7. Дөңес төртбұрыштың бұрыштары деп қандай бұрыштарды атайтынын түсіндіріңдер.
8. Төртбұрыш сызып, оның диагональдарын, қарама-қарсы қабырғалары мен қарама-қарсы бұрыштарын көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

42. а) Дөңес төртбұрыштың бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.

ә) Дөңес төртбұрыштың барлық бұрыштары доғал болуы мүмкін бе? Жауаптарыңды түсіндіріңдер.

б) Тұжырым дұрыс па: 1) дөңес көпбұрыштың бұрыштарының қосындысы оның қабырғаларының санына тәуелді емес; 2) дөңес бесбұрыштың бұрыштарының қосындысы 720°-қа тең?

в) Егер дөңес көпбұрыштың қабырғаларының санын: 1) 3-ке; 2) 8-ге арттырса, оның бұрыштарының қосындысы неше градусқа артады?

г) Бұрыштарының қосындысы: 1) 900°; 2) 5400° болатын дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

43. а) Әрбір бұрышы: 1) 60°; 2) 90° болатын дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

ә) Егер $\angle A = \angle C = 60°$, ал $\angle B = 1{,}4 \cdot \angle D$ болса, $ABCD$ дөңес төртбұрышының B және D бұрыштарын табыңдар.

б) Егер дөңес төртбұрыштың бұрыштары: 1) 2 : 4 : 5 : 7; 2) 3 : 7 : 4 : 6 сандарына пропорционал болса, оның ең үлкен және ең кіші бұрыштарын табыңдар.
в) Дөңес: 1) жетібұрыштың; 2) онбұрыштың бұрыштарының қосындысын табыңдар.
г) Бұрыштарының градустық өлшемі: 1) 1, 1, 2, 2, 3; 2) 1, 2, 2, 2, 6 сандарына пропорционал болатын дөңес бесбұрыш болуы мүмкін бе? Егер бар болса, сол бұрыштарды табыңдар.

В деңгейі

Баянауыл ұлттық саябағы

44. Қазақстанның Баянауыл ұлттық табиғи саябағында жануарлардың (а), құстардың (ә) қанша түрі бар екені есептің жауабының сандық шамасына сәйкес келеді. а) Төртбұрыштың бұрыштарының біреуі 160°-қа тең, ал қалғандарының қатынасы 2 : 3 : 5 болса, оның ең кіші бұрышын; ә) төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштарының кішісі үлкенінің $\frac{5}{13}$ бөлігіне, ал қалған екі бұрышының қосындысы 180°-қа тең болса, сол кіші бұрышын табыңдар.

45. а) Дөңес төртбұрыштың әрбір қабырғасының ұзындығы қалған қабырғалары ұзындықтарының қосындысынан кем болатынын дәлелдеңдер.
ә) Қабырғаларының ұзындықтары: 1) 5 см, 7 см, 8 см және 20 см; 2) 3 дм, 4 дм, 5 дм және 10 дм; 3) 6 м, 8 м, 20 м және 20 дм болатын төртбұрыш болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.
б) Қабырғаларының ұзындықтары: 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) 3, 4, 7, 10, 24 сандарына пропорционал болатын бесбұрыш бар бола ма?

46. а) Әрбір сыртқы бұрышы: 1) 72°; 2) 60°; 3) 45° болатын дөңес көпбұрыштың неше қабырғасы бар?

ә) Қандай көпбұрыштың бұрыштарының қосындысы оның сыртқы бұрыштарының қосындысына тең болады?

С деңгейі

47. а) Периметрі 23 см, ал оның бір қабырғасы басқаларынан сәйкесінше 2 см, 3 см, 4 см ұзын болатын төртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

ә) $ABCD$ төртбұрышының AC диагоналі A бұрышын екі тең бөлікке бөледі, $\angle B = \angle D = 90°$. Егер: 1) $\angle A = 60°$, $AC = 16$ см; 2) $\angle BAC = 45°$, $AB = 5$ см болса, онда C бұрышын және CB, CD қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

48. а) Дөңес төртбұрыштың ішіндегі қандай нүктеден оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы ең кіші болады?

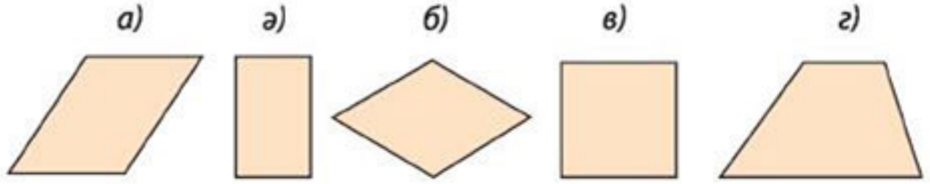
ә) Ұзындығы 4 см-ге тең қарапайым тұйық сынық сызықты радиусы 1 см-ге тең шеңберге сыйғызуға бола ма?

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

а) Қабырғалары қос-қостан параллель болатын; ә) барлық қабырғалары тең болатын; б) екі қабырғасы параллель, ал қалған екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш салыңдар.

2. Төртбұрыштың түрлері. Параллелограмм және оның қасиеттері

Қарама-қарсы қабырғалары параллель болатын төртбұрыш ***параллелограмм*** деп аталады (29, *а*, *ә*, *б*, *в*-суреттер).



29-сурет

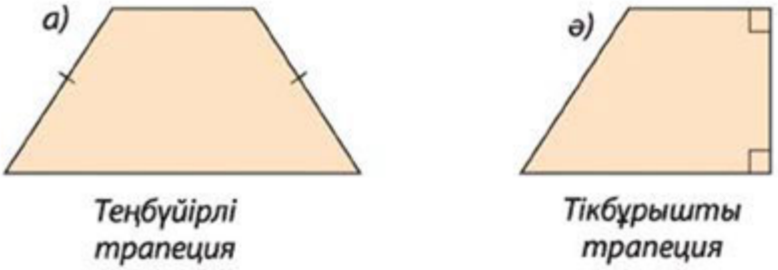
Барлық бұрышы тік болатын параллелограмм ***тіктөртбұрыш*** деп аталады (29, *ә*-сурет).

Барлық қабырғаларының ұзындықтары тең болатын параллелограмм ***ромб*** деп аталады (29, *б*-сурет).

Барлық қабырғалары тең болатын тіктөртбұрыш ***шаршы*** деп аталады (29, *в*-сурет).

Екі қабырғасы параллель, қалған екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш ***трапеция*** деп аталады (29, *г*-сурет). Трапецияның параллель қабырғалары *табандары* деп, басқа екі қабырғасы *бүйір қабырғалары* деп аталады.

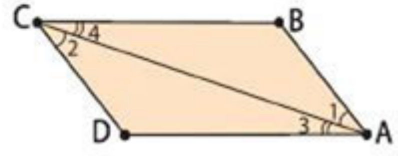
Трапецияның бүйір қабырғалары тең болса, ол *теңбүйірлі* трапеция деп аталады (30, *а*-сурет). Тік бұрышы бар трапеция *тікбұрышты* трапеция деп аталады (30, *ә*-сурет).



30-сурет

Т е о р е м а *(параллелограмның бұрыштары мен қабырғаларының қасиеттері).* **Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары және қарама-қарсы бұрыштары тең.**

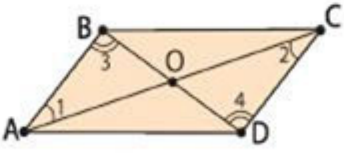
Д ә л е л д е у і. *ABCD* параллелограмы берілсін (31-сурет). *AC* диагоналі оны *ABC* және *ADC* екі үшбұрышқа бөледі. Бұл үшбұрыштар бір қабырғасы мен екі іргелес бұрышы бойынша тең (*AC* – ортақ қабырға, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 3 = \angle 4$, сәйкесінше, *AB* және *CD*, *AD* және *BC* параллель қабырғаларын *AC* қиюшы қиғанда пайда болған ішкі айқыш бұрыштар). Сондықтан, $AB = CD$, $AD = BC$ және $\angle B = \angle D$. $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. Дәлелдеу керегі де осы еді.



31-сурет

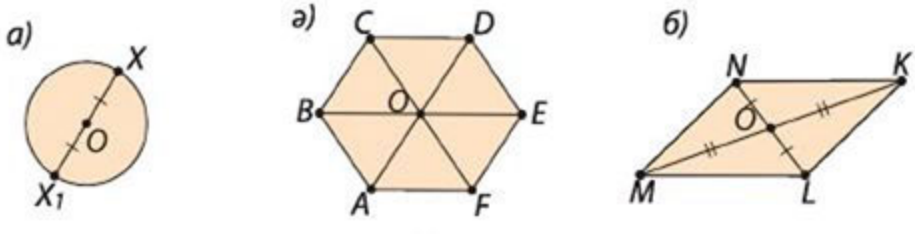
Т е о р е м а *(параллелограмның диагональдарының қасиеті).* **Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.**

Д ә л е л д е у і. *ABCD* – параллелограмм, ал оның диагональдары *O* нүктесінде қиылысатын болсын (неге қиылысатынын түсіндіріңдер) (32-сурет). Сонда $AB = CD$ (параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары); $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (*AB* және *CD* параллель түзулерін қиюшы қиғанда пайда болған ішкі айқыш бұрыштар). Бұдан $\Delta AOB = \Delta COD$ (үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі бойынша). Тең үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары тең, сондықтан $AO = OC$, $BO = OD$, дәлелдеу керегі де осы еді.



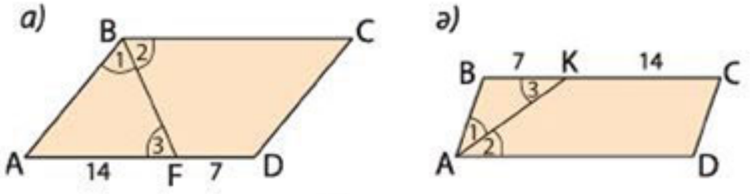
32-сурет

Егер фигураның әрбір нүктесіне *O* нүктесіне қарағанда симметриялы нүкте осы фигурада жататын болса, онда *фигура O нүктесіне қарағанда симметриялы* (немесе центрлік симметриялы) деп аталатынын естеріңе сала кетейік. *O* нүктесі *фигураның симметрия центрі* деп аталады. 33, *а*, *ә*, *б*-суреттерде центрлік симметриялы фигураларға мысалдар келтірілген. Параллелограмм – центрлік симметриялы фигура, оның симметрия центрі диагональдарының қиылысу нүктесі болады (33, *б*-сурет). Мұны өздерің дәлелдеңдер.



33-сурет

Е с е п. $ABCD$ параллелограмының бір бұрышының биссектрисасы оның қабырғасын: 1) $AF = 14$ см және $FD = 7$ см; 2) $BK = 7$ см және $KC = 14$ см кесінділерге бөледі (34, *а*, *ә*-суреттер). Параллелограмның периметрін табу керек.



34-сурет

Ш е ш у і. 1) BF биссектрисасын жүргізейік, $AF = 14$ см, $FD = 7$ см (34, *а*-сурет). Сонда $\angle 1 = \angle 2$ (BF – биссектриса болғандықтан). $\angle 2 = \angle 3$ (ішкі айқыш бұрыштар, $BC \parallel AD$ және BF – қиюшы). Екі бұрышы тең ($\angle 1 = \angle 3$) болатын ABF үшбұрышын алдық, яғни ол – теңбүйірлі. Бұдан шығатыны, $AB = AF = 14$ см. Параллелограмда $AB = CD = 14$ см, $BC = AD = 14 + 7 = 21$ (см). Сонда $P_{ABCD} = 2(14 + 21) = 70$ (см) болады.

2) Егер AK биссектрисасын жүргізсек және $BK = 7$ см, $KC = 14$ см болса (34, *ә*-сурет), онда $AB = BK = 7$ см болатын ABK үшбұрышын аламыз. Сонда $AB = CD = 7$ см, ал $P_{ABCD} = 2(7 + 21) = 56$ (см) болады.

Ж а у а б ы. 1) 70 см; 2) 56 см.

СҰРАҚТАР

1. Параллелограмм, тіктөртбұрыш, ромб, шаршы дегеніміз не?

2. Трапеция дегеніміз не? Қандай трапеция теңбүйірлі, тікбұрышты деп аталады?

3. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары және қарама-қарсы бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

4. Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

49. а) $ABCE$ тіктөртбұрышының AC диагоналі жүргізілген, $\angle CAB = 2 \cdot \angle ACB$. Егер $AC = 10$ см, $BC = a$ см болса, тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар.

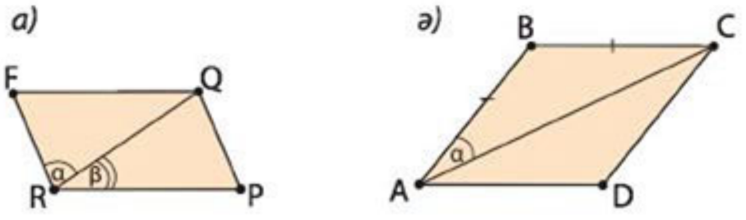
ә) Қабырғасы 3 см-ге тең $PEFL$ шаршысын және оның PF диагоналін салыңдар. EPF, EFP және FPL бұрыштарын табыңдар.

б) $MNPK$ ромбысының периметрі 12 дм-ге тең. Егер оның NK диагоналі мен MK қабырғасы тең болса, M және N бұрыштарын табыңдар.

в) Табандары BC және AD болатын $ABCD$ трапециясының $\angle A = 55°$, $\angle C = 140°$. Оның басқа екі бұрышын табыңдар.

г) $EFGH$ параллелограмы берілген. $\angle E$ және $\angle F$-ның биссектрисалары K нүктесінде қиылысады. $\angle EKF$-ті табыңдар.

50. 35, *а*, *ә*-суреттердегі берілгендері бойынша: а) $RFQP$ параллелограмының бұрыштарын; ә) $ABCD$ параллелограмының бұрыштарын табыңдар және оның ромб екенін дәлелдеңдер.



35-сурет

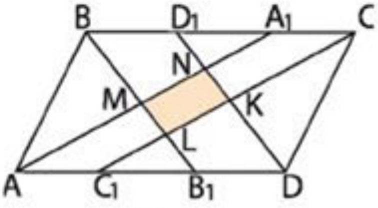
B деңгейі

51. а) $ABCD$ параллелограмының B және C бұрыштарының биссектрисалары оның AD қабырғасында қиылысады. $AD = 2AB$ болатынын дәлелдеңдер.

ә) $LMNP$ параллелограмының M бұрышының биссектрисасы LP қабырғасын оның ортасы болатын K нүктесінде қияды. Егер $NP = 25$ мм және $\angle N = 60°$ болса, параллелограмның периметрін табыңдар.

52. Егер: а) қарама-қарсы бұрыштарының қосындысы 94°-қа тең; ә) екі бұрышының айырымы 70°-қа тең болса, параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

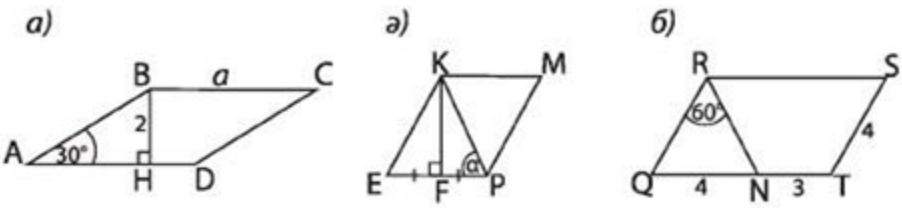
53. $ABCD$ параллелограмында $BC : AB = 1 : 2$. AB қабырғасының ортасы болатын M нүктесі C және D төбелерімен қосылған. CMD бұрышы 90°-қа тең болатынын дәлелдеңдер.



36-сурет

54. $ABCD$ – параллелограмм. AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кесінділері оның бұрыштарының биссектрисаларында жатыр (36-сурет). $MNKL$ төртбұрышының түрін анықтаңдар.

55. 37, *а*, *ә*, *б*-суреттердегі берілгендерден: а) $ABCD$ параллелограмының периметрін; ә) $EKMP$ параллелограмының бұрыштарын; б) $QRST$ параллелограмының бұрыштарын және периметрін табыңдар.



37-сурет

56. а) $ABCM$ параллелограмында $AB = 6$ см, ал диагональдары $AC = 5$ см және $BM = 9$ см. O – параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі, $P_{\Delta AOB}$ табыңдар.

ә) Параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін және ұштары қарама-қарсы қабырғаларында жататын кесінді осы нүктеде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

57. Егер: а) параллелограмның бір бұрышы екіншісінен 3 есе үлкен болса; ә) параллелограмның бір бұрышы екінші бұрышының 25 %-ын құраса, параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

58. а) Параллелограмның бір бұрышының биссектрисасы оның басқа қабырғасын 3 см және 4 см кесінділерге бөледі. Параллелограмның периметрін табыңдар.

ә) Параллелограмның периметрі 28 см, қабырғаларының бірі 5 см болса, оның бір бұрышының биссектрисасы қабырғасын ұзындықтары қандай кесінділерге бөледі?

б) Параллелограмның қабырғалары a және b-ға тең ($a > b$). Параллелограмның биссектрисасы оның үлкен қабырғасын қандай кесінділерге бөлетінін табыңдар.

59. а) $\angle P = 60°$ болатын $MNPK$ параллелограмы берілген. MK қабырғасына жүргізілген ND перпендикуляры оны ұзындықтары 3 см және 5 см болатын кесінділерге бөледі. Параллелограмның қабырғалары мен бұрыштарын табыңдар.

ә) Қабырғалары $AB = 5$ см және $BC = 8$ см болатын және AD қабырғасына жүргізілген BH перпендикуляры оны қақ бөлетін $ABCD$ параллелограмын салыңдар.

С деңгейі

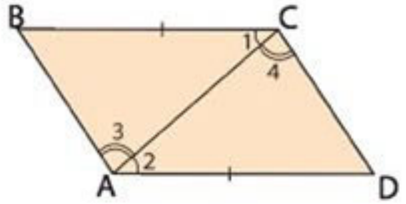
60. $ABCD$ параллелограмының A төбесінен биссектриса жүргізілген, ол CD қабырғасын F нүктесінде, ал BC қабырғасының созындысын E нүктесінде қияды. CEF үшбұрышының теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер.

61. $ABCD$ параллелограмының A және B бұрыштарының биссектрисалары CD қабырғасын үш бөлікке бөледі. Егер параллелограмның қабырғалары 5 см және 12 см болса, онда осы бөліктердің ұзындықтарын табыңдар.

3. Параллелограмның белгілері

Теорема (*параллелограмның бірінші белгісі*). **Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда ол төртбұрыш параллелограмм болады.**

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышында $BC \parallel AD$ және $BC = AD$ болсын. Төртбұрыштың AC диагоналін жүргізейік (38-сурет). Сонда үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $\Delta BCA = \Delta DAC$ (есептің шарты бойынша $BC = AD$, CA – ортақ қабырға, $\angle 1 = \angle 2$ – ішкі айқыш бұрыштар, $BC \parallel AD$ және AC – қиюшы). Үшбұрыштардың теңдігінен $\angle 3 = \angle 4$ болатыны шығады.



38-сурет

Сондықтан түзулердің параллельдігінің бірінші белгісі бойынша AB және CD түзулері параллель болады. Сонымен, төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының параллель, яғни төртбұрыштың параллелограмм екені дәлелденді.

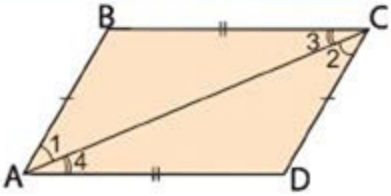
Теорема (*параллелограмның екінші белгісі*). **Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең болса, онда ол төртбұрыш параллелограмм болады.**

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышында $AB = DC$, $BC = AD$ болсын (39-сурет). $ABCD$ төртбұрышының AC диагоналін жүргізейік. Сонда:

1) үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша $\Delta ABC = \Delta CDA$, бұдан шығатыны, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$;

2) түзулердің параллельдігінің бірінші белгісі бойынша $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$;

3) $ABCD$ төртбұрышы – параллелограмм (параллелограмның анықтамасы бойынша). Теорема дәлелденді.



39-сурет

Т е о р е м а (*параллелограмның үшінші белгісі*). **Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе, онда ол төртбұрыш параллелограмм болады.**

Д ә л е л д е у і (40-сурет).

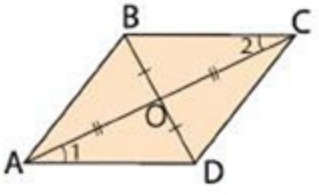
1) $\Delta AOD = \Delta BOC$ (үшбұрыштардың теңдігінің бірінші белгісі бойынша).

2) $BC = AD$ (тең үшбұрыштардың сәйкес қабырғалары).

3) $\angle 1 = \angle 2$ (тең үшбұрыштардың сәйкес бұрыштары).

4) $BC \parallel AD$ (түзулердің параллельдігінің бірінші белгісі бойынша).

5) $ABCD$ – параллелограмм (параллелограмның бірінші белгісі бойынша). Теорема дәлелденді.

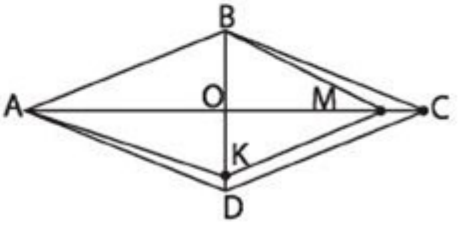


40-сурет

Е с е п. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ дөңес төртбұрышы берілген. ABO, BCO, CDO және ADO үшбұрыштарының периметрлері тең екені белгілі. $ABCD$ төртбұрышы ромб болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Алдымен $ABCD$ төртбұрышының диагональдары O нүктесінде қақ бөлінетінін кері жору арқылы дәлелдейік. $OC \geq OA$, ал $OD \geq OB$ деп жорияық. OC кесіндісіне OA кесіндісіне тең болатын OM кесіндісін, ал OD кесіндісіне OB кесіндісіне тең болатын OK кесіндісін өлшеп салайық (41-сурет). Сонда $ABMK$ төртбұрышы параллелограмм болады. Бұдан шығатыны, AOB және OMK үшбұрыштарының периметрлері тең. Есептің шартын еске ре отырып, $P_{\Delta OMK} = P_{\Delta OCD}$ болатынын алдық, $KM < MC + CD + DK$

болғандықтан, бұлай болуы мүмкін емес. Яғни, кері жоруымыз дұрыс емес, $OC = OA$ және $OD = OB$ болады, демек, $ABCD$ төртбұрышы – параллелограмм. Есептің шарты бойынша ABO және BOC үшбұрыштарының периметрлері тең және $AO = OC$, ал OB қабырғасы екеуіне ортақ болғандықтан, $AB = BC$ болады. Бұдан $ABCD$ параллелограмы ромб болатыны шығады.



41-сурет

СҰРАҚТАР

Параллелограмның белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

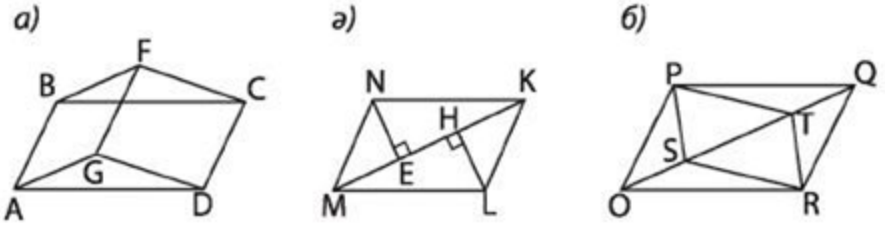
А деңгейі

62. Ұсынылған тұжырымдардың ішінен «параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең» деген теоремаға кері теореманы тауып, оны дәлелдеңдер: а) егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең болса, онда ол параллелограмм болады; ә) егер төртбұрыштың ең болмағанда екі қабырғасы тең болса, онда ол параллелограмм болады; б) егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары тең болмаса, онда ол параллелограмм болмайды.

63. а) $ABFG$ және $DCFG$ параллелограмдары берілген (42, *а*-сурет). $ABCD$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

ә) $MNKL$ параллелограмы берілген, $NE \perp MK$; $LH \perp MK$ (42, *ә*-сурет). $NE \parallel LH$ және $NE = LH$ екенін дәлелдеңдер.

б) $OPQR$ параллелограмы берілген, $OS = QT$ (42, *б*-сурет). $SPTR$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.



42-сурет

В деңгейі

64. а) Параллелограмның белгілерін пайдаланып: 1) түзу жолдың жиектері параллель бола ма; 2) төртбұрышты пластинка параллелограмм бола ма, соны қалай анықтауға болады?

ә) 1) Қарама-қарсы бұрыштарының екі жұбы тең болатын; 2) екі қабырғасы тең емес, қалған екі қабырғасы параллель болатын төртбұрыш параллелограмм бола ма?

65. а) Төбелері: 1) тіктөртбұрыштың; 2) ромбтың қабырғаларының ортасы болатын $ABCD$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

ә) Теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының табаны $AD = 2BC$, M нүктесі – AD-ның ортасы. $ABCM$ мен $MBCD$ төртбұрыштарының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

66. а) O нүктесі – $ABCD$ параллелограмының диагональдарының қиылысу нүктесі. A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелері, сәйкесінше, AO, BO, CO және DO кесінділерінің орталары. $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

ә) $MNPK$ параллелограмы берілген. MN, NP, PK және KM сәулелеріне сәйкесінше NA, PB, KC және MD тең кесінділері салынған. $ABCD$-ның параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

б) Центрі ортақ екі шеңбер берілген және олардың қиылысатын диаметрлері жүргізілген. Осы диаметрлердің ұштары параллелограмның төбелері болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

67. а) $ABCD$ тіктөртбұрышының A және C бұрыштарының биссектрисалары BC және AD қабырғаларын, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қияды. $AMCN$ төртбұрышының түрін анықтаңдар.

ә) $KBFD$ параллелограмы берілген. Оның BF пен KD қабырғаларына $\angle ABK = \angle CDF$ болатындай, сәйкесінше, C және A нүктелері белгіленген. $ABCD$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BC және DA қырларына BM және DK тең кесінділері салынған. $AMCK$ төртбұрышының параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

68. Центрі O болатын шеңбер берілген. Қандай да бір A нүктесінен шеңберге арасындағы бұрышы 120°-қа тең болатын екі жанама жүргізілген. O центріне қарағанда A нүктесіне симметриялы болатын B нүктесі арқылы берілген шеңберге тағы екі жанама жүргізілген. Жанамалардан құралған төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер және $AO = 3$ см болса, оның периметрін табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

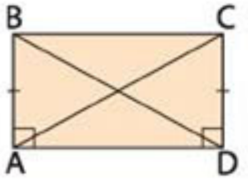
Қиылысатын екі түзу жүргізіп, олардың ортақ нүктесінен бастап осы түзулерге тең төрт кесінді салыңдар. Кесінділердің ұштарын тізбектей қосып, төртбұрыш тұрғызыңдар. Оның бұрыштарын өлшеп, салыстырыңдар.

4. Тіктөртбұрыштың қасиеттері мен белгілері

Әрбір тіктөртбұрыш параллелограмм болатындықтан, параллелограмның барлық қасиеттері тіктөртбұрыш үшін де орындалады. Мысалы: 1) тіктөртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары параллель және тең; 2) тіктөртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

Теорема (*тіктөртбұрыштың қасиеті*). **Тіктөртбұрыштың диагональдары тең.**

Дәлелдеуі. Екі катеті бойынша тікбұрышты $\Delta ADC = \Delta DAB$ (43-сурет), (AD – ортақ қабырға, $AB = DC$ – $ABCD$ параллелограмының қарама-қарсы қабырғалары). Сондықтан $AC = BD$.



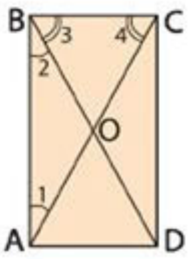
43-сурет

Теорема (*тіктөртбұрыштың бірінші белгісі*). **Егер параллелограмның бір қабырғасына іргелес екі бұрышы тең болса, онда ол тіктөртбұрыш болады.**

Дәлелдеуі. Параллелограмның бір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең. Теореманың шарты бойынша бұл бұрыштар тең, сондықтан олардың әрқайсысы тік болады. Бұдан басқа екі бұрышының да тік болатыны шығады. Барлық бұрыштары тік болатын параллелограмм тіктөртбұрыш болады.

Теорема (*тіктөртбұрыштың екінші белгісі*). **Егер параллелограмның диагональдары тең болса, онда ол тіктөртбұрыш болады.**

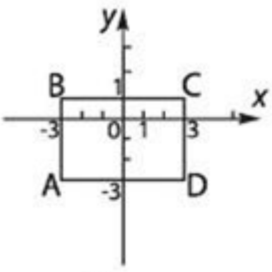
Дәлелдеуі. $ABCD$ параллелограмының (44-сурет) AC және BD диагональдары тең болсын. Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінетіні белгілі, сондықтан $AO = OB = OC$.



44-сурет

Бұдан AOB және BOC үшбұрыштарының теңбүйірлі екені, сондықтан олардың табанындағы бұрыштары $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, ал $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, бұдан $\angle 2 + \angle 3 = 90° = \angle ABC$ болатыны шығады. Дәл осылай, оның басқа да бұрыштарының тік болатыны шығады, сондықтан тік бұрышы бар параллелограмм тіктөртбұрыш болады.

Е с е п. Төбелерінің координаталары: $A(-3; -3)$, $B(-3; 1)$, $C(3; 1)$, $D(3; -3)$ болатын $ABCD$ төртбұрышының тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеу керек.



45-сурет

Д ә л е л д е у і. Координаталық жазықтыққа $ABCD$ төртбұрышын саламыз (45-сурет). A мен B нүктелері және D мен C нүктелерінің абсциссалары бірдей болғандықтан, A мен B және D мен C нүктелері Oy осіне параллель түзулердің бойында жатады. Бұдан шығатыны, $AB \parallel DC$. A мен D және B мен C нүктелерінің ординаталары бірдей болғандықтан, A мен D және B мен C нүктелері Ox осіне параллель түзулердің бойында жатады. Бұдан шығатыны, $AD \parallel BC$. Ox және Oy осьтері өзара перпендикуляр болғандықтан, $AD \perp DC$, $AD \perp AB$, яғни, $ABCD$ – тіктөртбұрыш.

СҰРАҚТАР

1. Тіктөртбұрыштың диагональдары тең болатынын дәлелдеңдер.
2. Тіктөртбұрыштың белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

69. а) Барлық бұрыштары тең болатын дөңес төртбұрыштың тіктөртбұрыш болатынын; ә) егер дөңес төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде тең кесінділерге бөлінетін болса, онда оның тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

70. Төртбұрыштың екі бұрышы тік. Ол тіктөртбұрыш бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

71. *ABCD* тіктөртбұрышының диагональдары *O* нүктесінде қиылысады. ΔAOD-ның теңбүйірлі үшбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

B деңгейі

72. а) Тіктөртбұрыштың периметрі 48 см. Оның қабырғаларының қатынасы 1 : 2 қатынасындай. Қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар. ә) *ABCD* тіктөртбұрышының *A* бұрышының биссектрисасы *BC* қабырғасын 2 см және 6 см бөліктерге бөледі. Тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар. б) Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасының оның диагоналіне қатынасы 1 : 2 қатынасындай. Диагональдардың қиылысуынан пайда болған кіші бұрышты табыңдар.

73. а) Тіктөртбұрыштың диагональдары 60° бұрыш жасап қиылысады. Егер тіктөртбұрыштың кіші қабырғасы 17 см болса, диагоналінің ұзындығын табыңдар.

ә) Тіктөртбұрыштың диагоналі оның бұрышын 1 : 2 қатынасындай етіп бөледі. Егер тіктөртбұрыштың екі диагоналі мен екі кіші қабырғаларының қосындысы 24 см болса, диагоналінің ұзындығын табыңдар.

C деңгейі

74. а) Ұзындығы 2,4 м, ені 1,8 м бөлменің еденін төсеу үшін өлшемі 30 см × 20 см кафель тақтайшасының нешеуі керек болады?

ә) Ұзындығы 4 м, ені 3 м бөлменің еденін жабуға жеткілікті болуы үшін өлшемі 80 см × 20 см ламинаттың 77 тақтайшасын қалай салған дұрыс?

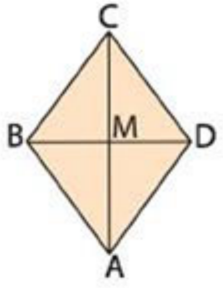
75. а) *ABCD* тіктөртбұрыштың *AC* диагоналіне түсірілген *BH* перпендикуляры *B* бұрышын 4 : 5 қатынасына бөледі. *HBD* бұрышын табыңдар.

ә) Қабырғалары 6 см және 2 см болатын тіктөртбұрыш берілген. Оның бұрыштары биссектрисаларының қиылысуынан *MNPK* төртбұрышы пайда болған. Соның түрін анықтап, диагональдарын табыңдар.

5. Ромбтың қасиеттері мен белгілері

Ромб – барлық қабырғалары тең параллелограмм болғандықтан, параллелограмның барлық қасиеттері ромб үшін де орындалады. Мысалы: 1) ромбтың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді; 2) ромбтың қарама-қарсы қабырғалары тең.

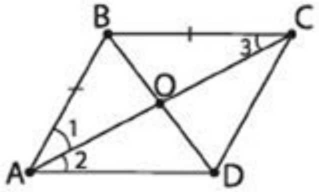
Теорема (*ромбтың қасиеттері*). **Ромбтың диагональдары өзара перпендикуляр және оның бұрыштарын қақ бөледі.**



46-сурет

Дәлелдеуі. $ABCD$ – ромб және M – оның AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі болсын (46-сурет). Сонда параллелограмның қасиеті бойынша $BM = MD$. BCD теңбүйірлі үшбұрышының CM медианасы оның әрі биіктігі, әрі биссектрисасы болады. Сондықтан $CA \perp BD$ және CA диагоналі BCD бұрышының биссектрисасы болғандықтан, оны қақ бөледі. BD диагоналі үшін де дәлелдеу дәл осылай жүргізіледі. (Өздерің дәлелдеңдер).

Теоремалар (*ромбтың белгілері*). 1. **Егер параллелограмның диагоналі оның бұрышын қақ бөлсе, онда ол ромб болады.** 2. **Егер параллелограмның диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда ол ромб болады.**

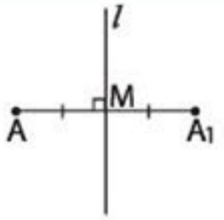


47-сурет

Дәлелдеуі. 1) AC – $ABCD$ параллелограмының A бұрышының биссектрисасы болсын (47-сурет). Теореманың шарты бойынша $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 2 = \angle 3$ ($AD \parallel BC$ түзулерін AC түзуімен қиғандағы ішкі айқыш бұрыштар) болғандықтан, $\angle 1 = \angle 3$ екені шығады. Сондықтан ABC үшбұрышы теңбүйірлі және $AB = BC$ болады. Бұдан шығатыны, $ABCD$ параллелограмының барлық қабырғалары тең, яғни ол ромб болады.

2) Өздігінен дәлелдеңдер.

Осьтік симметрияға қатысты кейбір ұғымдарды қайталайық. Түзу кесіндісінің орта перпендикуляры болса, кесіндінің ұштары осы *түзуге қарағанда симметриялы нүктелер* деп аталады. $AA_1 \perp l$ және $AM = MA_1$ (48-сурет). l түзуінің әрбір нүктесі өзіне-өзі симметриялы болады.

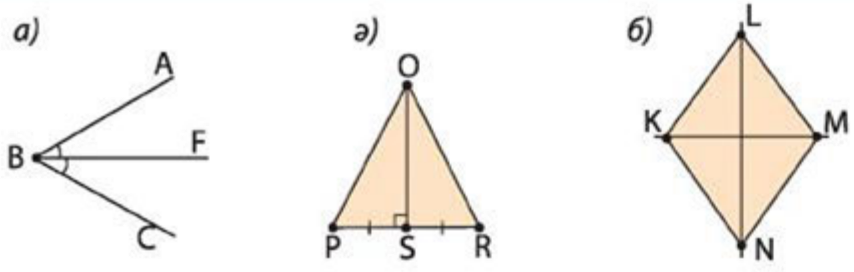


48-сурет

Фигураның әрбір нүктесіне l түзуіне қарағанда симметриялы нүкте осы фигурада жатса, онда фигураны *l түзуіне қарағанда симметриялы фигура* деп атайды. l түзуі фигураның *симметрия осі* деп аталады.

Осьтік симметриялы фигураларға (симметрия осі бар фигураларға) мысалдар қарастырайық (49, 50-суреттер). Бұрыштың биссектрисасы болатын түзу оның симметрия осі болады (50, *а*-сурет). Мұны BF биссектрисасына перпендикуляр болатын және бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін түзу жүргізу арқылы өздігінен дәлелдеңдер. Теңбүйірлі үшбұрыштың төбесінен табанына жүргізілген медианасы (биіктігі, биссектрисасы) жататын түзу осы үшбұрыштың симметрия осі болады (50, *ә*-сурет).

49-сурет



50-сурет

Е с е п. Ромбтың диагональдары жататын түзулер оның симметрия осьтері болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. *KM* және *LN* – *KLMN* ромбысының диагональдары болсын (50, *б*-сурет). Сонда *LN* биссектрисасы *KLM* бұрышының, ал *NL* биссектрисасы *KNM* бұрышының симметрия осі болады. Яғни, *LN* түзуі *KLMN* ромбысының симметрия осі болады. *KM* түзуінің де *KLMN* ромбысының симметрия осі болатынын өздігінен дәлелдеңдер.

СҰРАҚТАР

1. Ромбтың диагональдарының өзара перпендикуляр болатынын және оның бұрыштарын қақ бөлетінін дәлелдеңдер.

2. Ромбтың бір белгісін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

3. а) Бір; ә) екі; б) үш; в) төрт симметрия осі; г) шексіз көп симметрия осі бар болатын фигураларға мысалдар келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

76. Тұжырымдардың қайсысы дұрыс екенін анықтаңдар: а) кез келген параллелограмм ромб болады; ә) кез келген ромб параллелограмм болады; б) шаршы тіктөртбұрыш болады.

77. Ромбтың диагоналі оның бір қабырғасымен 40° бұрыш жасайды. Ромбтың бұрыштарын табыңдар.

78. *ABCD* ромбысының *BD* диагоналі оның қабырғасына тең. а) Ромбтың бұрыштарын; ә) *BAC*, *CBD* бұрыштарын табыңдар.

B деңгейі

79. а) $ABCD$ ромбысының DC қабырғасы оның BD және AC диагональдарының C және D нүктелерінен әрі қарай созындысымен, сәйкесінше, 4 : 5 қатынасындай болатын FDC және ECD бұрыштарын құрайды. Ромбтың бұрыштарын табыңдар.

ә) $MNPK$ ромбысының MK мен KP қабырғаларына, сәйкесінше, NF пен NH перпендикулярлары жүргізілген. Егер $\angle FNH = 54°$ болса, ромбтың бұрыштарын табыңдар.

80. а) AC және BD түзулері симметрия осі болатын $ABCD$ төртбұрышының ромб болатынын дәлелдеңдер.

ә) ANK үшбұрышы – теңқабырғалы. B, C және D нүктелері, сәйкесінше, AN, NK және AK қабырғаларының орталары. $ABCD$ төртбұрышының ромб болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

81. а) ABC – табаны AC болатын теңбүйірлі үшбұрыш. B_1 нүктесі AC түзуіне қарағанда B нүктесіне симметриялы. $ABCB_1$ төртбұрышының ромб болатынын дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ төртбұрышы AC түзуіне қарағанда симметриялы. Егер $AB = 1$ дм, $CD = 2$ дм болса, BC және AD қабырғаларын табыңдар.

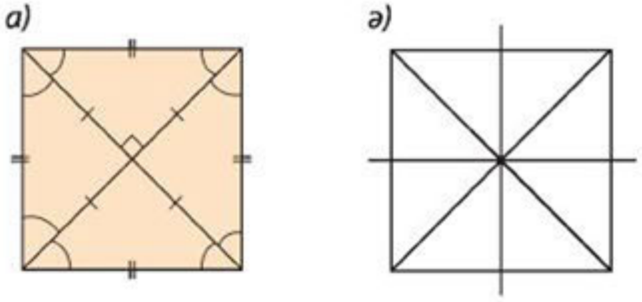
ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Қиылысатын екі перпендикуляр түзу жүргізіп, олардың ортақ нүктесінен бастап осы түзулерге тең төрт кесінді салыңдар. Кесінділердің ұштарын тізбектей қосып, төртбұрыш тұрғызыңдар. Оның: а) қабырғаларының ұзындықтарын; ә) бұрыштарын өлшеңдер. Осы шамаларды салыстырыңдар.

6. Шаршының қасиеттері мен белгілері

Барлық қабырғалары тең тіктөртбұрыш ***шаршы*** деп аталады.

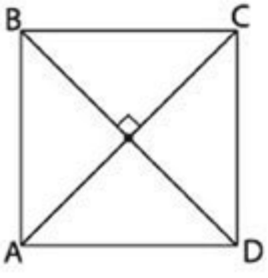
Шаршының диагональдары: 1) тең; 2) қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді; 3) өзара перпендикуляр; 4) бұрыштарының биссектрисасы болады (51, *а*-сурет). Шаршының төрт симметрия осі бар (51, *ә*-сурет).



51-сурет

Т е о р е м а л а р (*шаршының белгілері*). 1) **Егер тіктөртбұрыштың диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда ол шаршы болады.** 2) **Егер ромбтың диагональдары тең болса, онда ол шаршы болады.**

Д ә л е л д е у і. 1) $ABCD$ тіктөртбұрышының AC және BD диагональдары өзара перпендикуляр болсын (52-сурет). Кез келген тіктөртбұрыш параллелограмм болады. Параллелограмның диагональдары перпендикуляр болғандықтан, ол ромб болады да, $AB = BC = CD = DA$ теңдігі шығады.

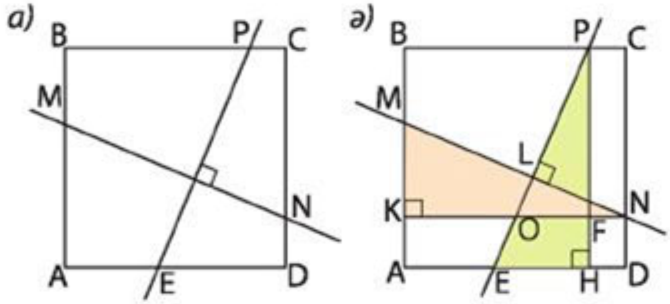


52-сурет

ABCD тіктөртбұрышының барлық қабырғалары тең болғандықтан, ол шаршы болады.

2) Өздігінен дәлелдеңдер.

Е с е п. *MN* түзуі *ABCD* шаршысының *AB* және *CD* қабырғаларын *M* және *N* нүктелерінде қияды, ал оған перпендикуляр *PE* түзуі оның *BC* және *AD* қабырғаларын *P* және *E* нүктелерінде қияды. *MN* және *PE* кесінділерінің ұзындықтарын салыстырайық (53, *а*-сурет).



53-сурет

Ш е ш у і. *P* және *N* нүктелерінен шаршының қарама-қарсы қабырғаларына *PH* және *NK* перпендикулярларын жүргізейік (53, *ә*-сурет). Сонда *PH* = *AB* = *NK* = *AD* болады. *PE* және *MN* кесінділерінің қиылысуын *L* нүктесімен, *PE* және *KN* кесінділерінің қиылысуын *O* нүктесімен, *KN* және *PH* кесінділерінің қиылысуын *F* нүктесімен белгілейік. Сонда тікбұрышты *OPF* және *OLN* үшбұрыштарында *O* – ортақ бұрыш, яғни $\angle FPO = \angle LNO$ (тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы 90°-қа тең болатындықтан). Бұдан *KNM* және *HPE* тікбұрышты үшбұрыштарының тең екені шығады (катеті мен сүйір бұрышы бойынша). Яғни *MN* = *PE* болады.

Ж а у а б ы. *MN* және *PE* кесінділері тең.

СҰРАҚТАР

1. Шаршының өздеріңе белгілі қасиеттерін атап шығыңдар.
2. Шаршының белгілерін тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

82. Қай тұжырымның дұрыс екенін анықтаңдар: а) тіктөртбұрыштың диагональдары тең; ә) егер төртбұрыштың диагональдары тең болса, ол тіктөртбұрыш болады; б) шаршының диагональдары тең және өзара перпендикуляр; в) егер төртбұрыштың диагональдары тең және перпендикуляр болса, ол шаршы болады.

83. а) Параллелограмның диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда ол шаршы бола ма?

ә) Теңбүйірлі тікбұрышты ABC үшбұрышы берілген. Оның тік бұрышының төбесінен CD биссектрисасы мен AC және BC қабырғаларына перпендикуляр болатын DM және DN кесінділері жүргізілген. $DMCN$ төртбұрышының түрін анықтаңдар.

84. $ABCD$ шаршысының диагональдары O нүктесінде қиылысады. AOB үшбұрышының бұрыштарын есептеңдер.

В деңгейі

85. а) $ABCD$ шаршысының AC диагоналінің ұзындығы 18,4 см. A төбесінен AC диагоналіне перпендикуляр болатын және BC мен CD қабырғаларының созындыларын, сәйкесінше, M және N нүктелерінде қиятын түзу жүргізілген. MN кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

ә) Шаршының төбелері арқылы оның диагональдарына параллель жүргізілген түзулердің қиылысуынан төртбұрыш құралған. Оның түрін анықтаңдар және шаршының диагоналі 4,5 см-ге тең болса, төртбұрыштың периметрін табыңдар.

86. Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрышқа екі төбесі гипотенузада, қалған екеуі катеттерде жататындай етіп іштей шаршы сызылған. Гипотенузаның ұзындығы 12 см болса, шаршының периметрін табыңдар.

87. $\angle C = 90°$, $AC = CB = 16$ см болатын ABC үшбұрышы және $CKMN$ шаршысы берілген. Мұндағы $K \in AC$, $N \in CB$, $M \in AB$. Шаршының периметрін табыңдар.

С деңгейі

88. ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, CD – оның биссектрисасы. BC және AC қабырғаларына $DK \parallel AC$, $DF \parallel BC$ болатындай етіп, сәйкесінше, K және F нүктелері белгіленген. $CKDF$ шаршы болатынын дәлелдеңдер.

89. Шаршы тәріздес жер телімінің қоршаулары алынып тасталған. Тек екі параллель қабырғасында екі бағана қалған. Егер оның симметрия центрі қазықпен белгіленген болса, онда жер телімінің шегарасын қалай қайта қалпына келтіруге болады? Бұлай жасау ылғи да мүмкін бола ма?

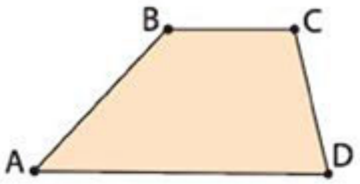
ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Теңбүйірлі трапеция салыңдар. Оның: а) диагональдарын; ә) үлкен табанындағы бұрыштарын өлшеңдер. Осы шамаларды салыстырыңдар.

7. Трапецияның қасиеттері мен белгілері

Теорема (*трапецияның қасиеті*). **Трапецияның бүйір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең, ал табанына іргелес бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең емес.**

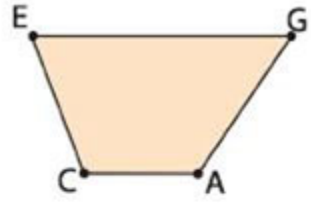
Дәлелдеуі. $ABCD$ трапециясының табандары AD және BC болсын (54-сурет). Сонда $AD \parallel BC$, ал AD және BC параллель түзулері мен AB қиюшыдан пайда болған ішкі тұстас бұрыштарының қасиеті бойынша $\angle A + \angle B = 180°$. Трапецияның табанына іргелес бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болуы мүмкін емес. Егер олардың қосындысы 180°-қа тең болса, онда $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болар еді, ал бұл $ABCD$ трапеция деген шартқа қарама-қайшы келеді.



54-сурет

Теорема (*трапецияның белгісі*). **Егер төртбұрыштың қандай да бір қабырғасына іргелес екі бұрышының қосындысы 180°-қа тең, ал көршілес қабырғасына іргелес екі бұрышының қосындысы 180°-қа тең болмаса, онда мұндай төртбұрыш трапеция болады.**

Дәлелдеуі. $AGEC$ төртбұрышының CE қабырғасына іргелес C және E бұрыштарының қосындысы 180° (55-сурет), ал A және C бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болмасын. C және E бұрыштары – AC және GE түзулері мен CE қиюшысынан пайда болған ішкі тұстас бұрыштар. Түзулердің параллельдігінің белгісі бойынша AC және GE қабырғалары параллель. Теореманың шарты бойынша $\angle A + \angle C \neq 180°$ болғандықтан, төртбұрыштың басқа екі AG және CE қабырғалары параллель емес. Бұдан $AGEC$ төртбұрышының трапеция болатыны шығады.



55-сурет

Теңбүйірлі трапецияның төменде берілген қасиетін (1) және белгісін (2) өздігінен дәлелдеңдер:

1) **теңбүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштары және диагональдары тең;**

2) **егер трапецияның табанындағы бұрыштары тең болса, не диагональдары тең болса, онда ол теңбүйірлі болады.**

СҰРАҚТАР

1. Трапецияның бүйір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы неге тең?

2. Теңбүйірлі емес трапецияның табанындағы бұрыштары тең емес екенін дәлелдеңдер.

3. Теңбүйірлі трапецияның диагональдары тең болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

90. а) Трапецияның диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінбейтінін дәлелдеңдер.

ә) Төбелері теңбүйірлі трапецияның қабырғаларының орталары болатын төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

91. $ABCD$ трапециясының AC диагоналі оның CD бүйір қабырғасына перпендикуляр. BC табаны AB бүйір қабырғасына тең, $\angle ADC = 55°$. Трапецияның қалған бұрыштарын табыңдар.

B деңгейі

92. Табандары AD және BC болатын $ABCD$ трапециясында DM және CK – D және C бұрыштарының биссектрисалары. Осы биссектрисалардың арасындағы бұрышты табыңдар.

93. Егер $\angle C - \angle A = 80°$ болса, үлкен табаны AD болатын теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының бұрыштарын табыңдар.

94. Трапецияның периметрі 40 см, кіші табаны 10 см. Кіші табанының төбесі арқылы бүйір қабырғасына параллель түзу жүргізілген. Пайда болған үшбұрыштың периметрін табыңдар.

95. Үлкен табаны AD болатын теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының BH перпендикуляры AD табанын 3,5 см және 8,5 см кесінділерге бөледі. Трапецияның табандарын табыңдар.

96. Теңбүйірлі трапецияның үлкен табаны 7,5 см, бүйір қабырғасы 2 см, ал сүйір бұрышы 60°. Осы трапецияның периметрін табыңдар.

C деңгейі

97. Үлкен табаны AD болатын $ABCD$ трапециясының AC диагоналі A бұрышын қақ бөледі және $AC \perp CD$. Периметрі 25 см, ал $\angle D = 60°$ болса, трапецияның қабырғаларын табыңдар.

98. Егер трапецияның симметрия осі бар болса, онда ол теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер.

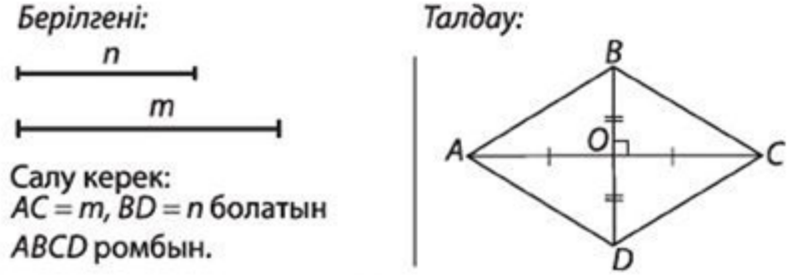
ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

6 см және 4 см болатын екі кесінді салыңдар. Циркуль мен сызғыштың көмегімен: а) диагональдары берілген кесінділерге тең болатын ромб; ә) диагональдары 4 см және 6 см болатын (ромб болмайтын) параллелограмм салыңдар.

8. Циркуль мен сызғыштың көмегімен төртбұрыштар салу

Есеп. Циркуль мен сызғыштың көмегімен диагональдарының ұзындықтары бойынша ромб салу керек.

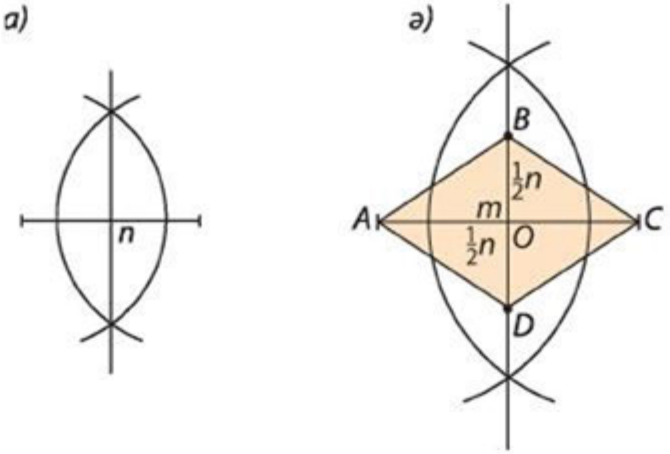
Шешуі. Ромбтың диагональдары өзара перпендикуляр және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді. Ромбты салуда осы қасиетті қолданамыз (56-сурет).



56-сурет

1) n кесіндісін қақ бөлейік (57, *а*-сурет).

2) $AC = m$ кесіндісінің орта перпендикулярын тұрғызып, оның осы кесіндімен қиылысу нүктесін O әрпімен белгілейік (57, *ә*-сурет).



57-сурет

3) Орта перпендикулярдың O нүктесінің екі жағына AC түзуінен бірдей қашықтықта $OB = OD = \frac{n}{2}$ кесінділерін саламыз. AB, BC, CD және DA кесінділерін жүргіземіз. Салуымыз бойынша диагональдары перпендикуляр және қиылысу нүктесінде қақ бөлінгендіктен, $ABCD$ төртбұрышы ромб болады. Кесіндіге тек бір ғана орта перпендикуляр жүргізуге болатындықтан, есептің бір ғана шешімі бар болады.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

99. Циркуль мен сызғыштың көмегімен: а) көршілес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы бойынша; ә) берілген диагональдары мен олардың арасындағы бұрышы бойынша параллелограмм салыңдар.

В деңгейі

100. Циркуль мен сызғыштың көмегімен: а) диагоналі бойынша шаршы; ә) диагоналі және қабырғасы мен екінші диагоналінің арасындағы бұрышы бойынша ромб салыңдар.

С деңгейі

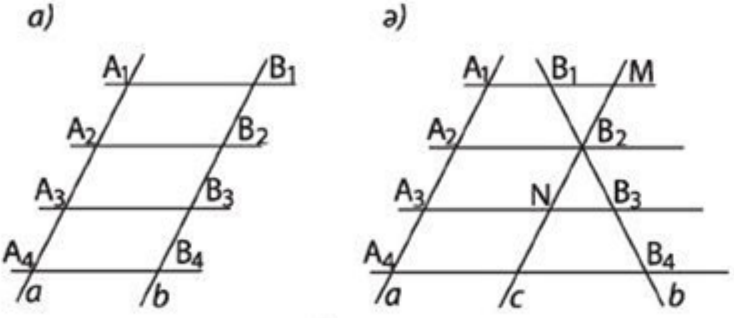
101. Берілген кесіндінің ұзындығы шаршының диагоналі мен қабырғасының ұзындықтарының қосындысына тең болатындай етіп шаршы салыңдар.

102. а) Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген үлкен табаны мен бүйір қабырғалары бойынша тікбұрышты трапеция салыңдар.
ә) Параллелограмның белгілерін пайдаланып: 1) берілген түзуге параллель кесінді; 2) берілген үш нүкте төбелері болатын параллелограмм салыңдар.

9. Фалес теоремасы

Т е о р е м а (*Фалес теоремасы, б.з.д. VI ғасырда өмір сүрген ежелгі грек оқымыстысы*). **Егер екі түзудің біріне өзара тең бірнеше кесіндіні тізбектей салып, олардың ұштары арқылы екінші түзуді қиятын параллель түзулер жүргізсе, онда олар екінші түзуден өзара тең кесінділер қияды.**

Д ә л е л д е у і. a түзуіне өзара тең A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... кесінділерін салып, олардың ұштары арқылы b түзуін B_1, B_2, B_3, ... нүктелерінде қиятын параллель түзулер жүргізілген (58-сурет). B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... кесінділері өзара тең болатынын дәлелдеу керек. $B_1B_2 = B_2B_3$ болатынын дәлелдейік.



58-сурет

Алдымен, a және b түзулері параллель болатын жағдайды қарастырайық (58, a-сурет). $A_1B_1B_2A_2$ және $A_2B_2B_3A_3$ параллелограмдарының қарама-қарсы қабырғалары болғандықтан $A_1A_2 = B_1B_2$ және $A_2A_3 = B_2B_3$ болады. $A_1A_2 = A_2A_3$ болғандықтан, $B_1B_2 = B_2B_3$ болады.

Егер a және b түзулері параллель болмаса, онда B_2 нүктесі арқылы a түзуіне параллель c түзуін жүргіземіз (58, ә-сурет). Ол A_1B_1 және A_3B_3 түзулерін M және N нүктелерінде қияды. $B_2M = B_2N$ болғандықтан (жоғарыдағы дәлелдеу бойынша), бір қабырғасы мен оған іргелес екі бұрышы ($\angle NB_2B_3 = \angle MB_2B_1$ вертикаль бұрыштар A_1B_1 және A_3B_3 параллель түзулерін c қиюшы қиғанда пайда болатын ішкі айқыш бұрыштар $\angle B_1MB_2 = \angle B_3NB_2$) бойынша $\Delta B_1MB_2 = \Delta B_2NB_3$.

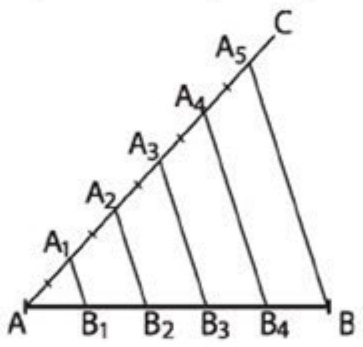
Бұдан шығатыны, $B_1B_2 = B_2B_3$. Дәл осылай $B_2B_3 = B_3B_4$ және т. б. теңдіктерін де дәлелдеуге болады.

1 - е с е п. Берілген AB кесіндісін өзара тең n бөлікке бөлу керек.

Ш е ш у і. 1. AB кесіндісінде жатпайтын AC сәулесін жүргіземіз.

2. Сәулеге A нүктесінен бастап берілген AB кесіндісін неше тең бөлікке бөлу керек болса, сонша өзара тең болатын A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесінділерін белгілейміз (мысалы, 59-суретте $n = 5$).

3. Соңғы кесіндінің ұшы мен B нүктесі арқылы түзу жүргіземіз.



59-сурет

4. A_1, A_2, ..., A_{n-1} нүктелері арқылы осы түзуге параллель түзулер жүргіземіз.

5. Осы түзулердің AB кесіндісімен қиылысатын B_1, B_2, ..., B_{n-1} нүктелері Фалес теоремасы бойынша оны тең n бөлікке бөледі.

Мысалы, $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$ қатынасының әрқайсысы $\frac{1}{2}$-ге тең болатынын айта кетейік.

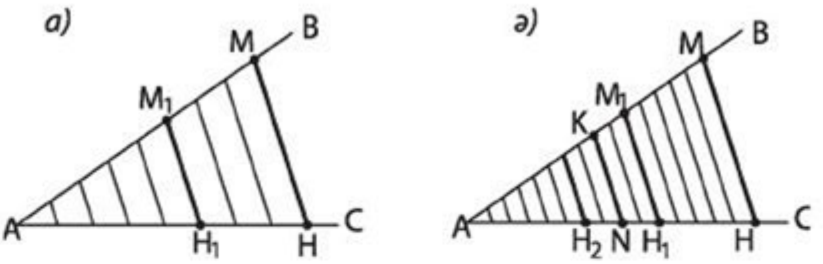
Егер $\frac{AB}{A_1B_1}$ кесінділерінің ұзындықтарының қатынасы $\frac{CD}{C_1D_1}$ кесінділерінің ұзындықтарының қатынасына тең болса, онда AB және CD кесінділері A_1B_1 және C_1D_1 кесінділеріне *пропорционал* деп аталады. Мысалы, егер $AB = 15$ см, $A_1B_1 = 20$ см, $CD = 12$ см, $C_1D_1 = 16$ см болса, онда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{3}{4}$. AB және CD кесінділері A_1B_1 және C_1D_1 кесінділеріне пропорционал. Кесінділердің пропорционалдығы бірнеше кесінді үшін де орындалады. Мысалы, егер $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MK}{M_1K_1}$

болса, онда AB, CD және MK кесінділері A_1B_1, C_1D_1 және M_1K_1 кесінділеріне пропорционал болады.

Теорема (*пропорционал кесінділер туралы*). **Бұрыштың қабырғаларын қиып өтетін параллель түзулер оның қабырғаларынан пропорционал кесінділер қияды.**

Дәлелдеуі. HM және H_1M_1 параллель түзулері BAC бұрышының қабырғаларын қиятын болсын (60, *а*-сурет). $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ болатынын дәлелдейік. Екі жағдайды қарастырайық:

1) алдымен, AH_1 кесіндісіне n бүтін сан рет, ал AH кесіндісіне m бүтін сан рет салынатындай a кесіндісін таңдап алуға болатын жағдайды қарастырайық. Сонда $AH_1 = na$ және $AH = ma$ болады. Фалес теоремасы бойынша AM_1 кесіндісі тең n бөлікке бөлінеді, ал AM кесіндісі тең m бөлікке бөлінеді. Осындай кесінділердің бірін b деп белгілейік, сонда $AM_1 = nb$, $AM = mb$. Осыдан, $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$, $\frac{AH}{AM} = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$ болады да, $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ теңдігі шығады.



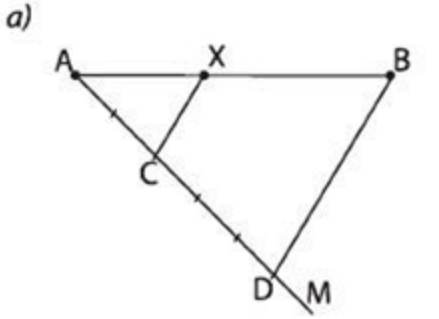
60-сурет

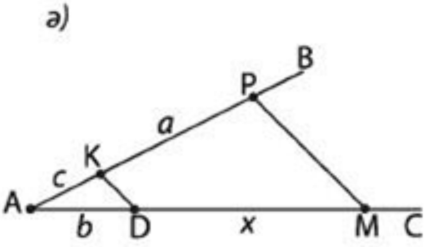
2) a кесіндісін таңдап алу мүмкін болмасын. Бұл жағдайда да $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ болатынын кері жору арқылы дәлелдейік. $\frac{AH_1}{AM_1} \neq \frac{AH}{AM}$ болсын, мысалы, $\frac{AH_1}{AM_1} > \frac{AH}{AM}$. $\frac{AH_2}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ орындалатындай $AH_2 < AH_1$ кесіндісін алайық. H_2H_1 кесіндісінде бөлу нүктелері болатындай етіп, AH кесіндісін ұзындықтары бірдей көп кесінділерге бөлейік (60, *ә*-сурет). Олардың бірін N деп белгілеп, $NK \parallel HM$ жүргізейік.

Сонда, жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AM}$ болады. $AN > AH_2$, ал $AK < AM_1$ болғандықтан, $\frac{AH_2}{AM_1} < \frac{AN}{AK}$ орындалады. Бұдан шығатыны, $\frac{AH_2}{AM_1} < \frac{AH}{AM}$. Бірақ, бұл $\frac{AH_2}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ теңдігіне қайшы келеді, яғни, кері жоруымыз дұрыс емес. Ендеше, $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$ теңдігі орындалады екен. Теорема дәлелденді.

2 - е с е п. AB кесіндісін $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$ қатынасындай AX және XB кесінділеріне бөлу керек.

Ш е ш у і. AB түзуінде жатпайтын AM сәулесін жүргізейік және осы сәулеге өзара тең 5 кесінді салайық (61, *а*-сурет). Содан соң соңғы кесіндінің D нүктесін B нүктесімен қосайық. Екінші кесіндінің C нүктесінен BD түзуіне параллель CX түзуін жүргізейік. Ол AB кесіндісін $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$ қатынасы орындалатындай X нүктесінде қиып өтеді (пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша).





61-сурет

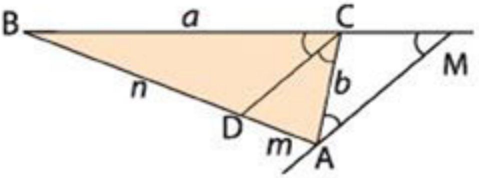
3 - е с е п. a, b, c үш кесінді берілген. $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ қатынасы орындалатындай *пропорцияның төртінші x кесіндісін* салу керек.

Ш е ш у і. Берілген пропорцияны $\frac{c}{b} = \frac{a}{x}$ түрінде жазып алайық. Кез келген BAC бұрышын және оның төбесінен бастап бір қабырғасына $AK = c$ және $KP = a$ кесінділерін, ал екінші қабырғасына $AD = b$

кесіндісін салайық (61, ә-сурет). KD кесіндісін және оған параллель PM түзуін жүргізейік. Сонда пропорционал кесінділер туралы теоремадан $DM = x$ болады (мұны өздігінен дәлелдеңдер).

4 - е с е п. *Үшбұрыштың бұрышының биссектрисасы қарсы жатқан қабырғасын іргелес жатқан қабырғаларына пропорционал кесінділерге бөлетінін* дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. CD – ABC үшбұрышының биссектрисасы, $BC = a$, $AC = b$, $DB = n$, $AD = m$ болсын (62-сурет). $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$ теңдігі орындалатынын дәлелдейік. A нүктесі арқылы CD биссектрисасына параллель түзу жүргізіп, оның BC сәулесімен қиылысу нүктесін M деп белгілейік. Сонда BCA бұрышы ACM үшбұрышының сыртқы бұрышы болады. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған сыбайлас емес екі бұрыштың қосындысына тең болатындықтан, $\angle BCA = \angle CAM + \angle M$ болады. Бұдан шығатыны $\angle M = \angle BCA - \angle CAM$. $\angle CAM = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCA$ ($CD \parallel AM$ және AC қиюшыдан жасалған ішкі айқыш бұрыштар) болғандықтан, $\angle M = \frac{1}{2}\angle BCA = \angle CAM$. Осыдан, ΔACM – теңбүйірлі және $AC = CM = b$ екені шығады. Яғни, пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.



62-сурет

СҰРАҚТАР

1. Фалес теоремасын тұжырымдап, дәлелдеңдер.
2. Қандай кесінділер пропорционал кесінділер деп аталады?
3. Пропорционал кесінділер туралы теореманы тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

103. а) Қатынастары: $1; \frac{2}{3}$ қатынасына тең болатын пропорционал кесінділерді табыңдар (59-сурет).

ә) Егер: 1) $AB = 0{,}8$ см, $CD = 4$ см, $MN = 0{,}3$ см, $PK = 1{,}5$ см; 2) $AB = 7$ м, $CD = 2$ м, $MN = 3$ м, $PK = 10{,}5$ м болса, AB мен CD кесінділері MN мен PK кесінділеріне пропорционал бола ма? Пропорционал болса, пропорция құрастырыңдар.

б) Пропорциядағы белгісіз x-тің мәнін табыңдар: 1) $5 : x = 4 : 7$; 2) $5 : 4 = 2x : 13$; 3) $2 : 3 = 11 : (x + 3)$.

104. а) Берілген кесіндіні циркуль мен сызғыштың көмегімен: 1) 3; 2) 5 тең кесінділерге бөліңдер.

ә) AB кесіндісінен $AC : CB = 2 : 3$ болатын C нүктесін табыңдар.

б) AB түзуінен $AD : DB = 4 : 3$ болатын D нүктесін табыңдар. A, B және D нүктелері орналасуының барлық мүмкін болатын жағдайларын қарастырыңдар.

В деңгейі

105. а) Ұзындығы 98 см-ге тең AB кесіндісі: 1) 2; 4; 8; 2) 3; 4; 5 сандарына пропорционал болатын үш кесіндіге бөлінген. Әрбір кесіндінің ұзындығын табыңдар.

ә) $AC = d$ кесіндісіне $AB : BC = x : y$ болатындай B нүктесі белгіленген. AB мен BC кесінділерінің ұзындықтарын d, x және y арқылы өрнектеңдер.

б) AN – қабырғалары $AB = 12$ см, $BC = 22$ см, $AC = 21$ см болатын ΔABC-ның биссектрисасы. BN мен NC-ны табыңдар.

106. а) $ABCD$ параллелограмының AD және BC қабырғаларының орталарын, сәйкесінше, E және F деп белгілеп, BE және DF кесінділері жүргізілген. Осы кесінділердің AC диагоналін үш тең бөлікке бөлетінін дәлелдеңдер.

ә) $ABCD$ параллелограмында $AC = 15$ см. AB қабырғасының ортасы болатын M нүктесін D төбесімен қосқан. DM кесіндісі AC диагоналін бөлгенде пайда болған кесінділерді табыңдар.

107. а) ABC үшбұрышының BC қабырғасының ортасы болатын M нүктесі арқылы BA қабырғасына параллель және AC қабырғасын N нүктесінде қиятын MN түзуі жүргізілген. Сол түзуге $NK = MN$ кесінділері салынған. $ABMK$ – параллелограмм болатынын дәлелдеңдер.

ә) ABC үшбұрышының AC қабырғасына $AM : MC = 4 : 5$ болатындай M нүктесі белгіленген. $MN \parallel AB$, $N \in BC$ кесіндісін салыңдар. Егер $CB = 4{,}5$ см болса, NB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

С деңгейі

108. а) Теңбүйірлі трапецияның диагональдарының орталары арқылы өтетін түзу оның бүйір қабырғаларымен тең бұрыштар жасап, қиылысатынын дәлелдеңдер.

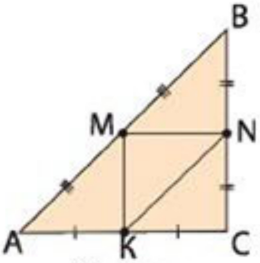
ә) Үш кесінді: a, b, c берілген. 1) $\frac{x}{a} = \frac{a+b}{b}$; 2) $\frac{x}{a+b} = \frac{a+c}{c}$ шарты орындалатындай төртінші пропорционал x кесіндісін табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

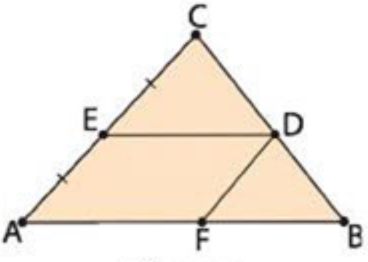
ABC үшбұрышын салып, оның AB және BC қабырғаларының орталарын, сәйкесінше, M және N деп белгілеңдер. MN және AC кесінділерін өлшеп, оларды салыстырыңдар.

10. Үшбұрыштың орта сызығы

Үшбұрыштың екі қабырғасының ортасын қосатын кесінді ***үшбұрыштың орта сызығы*** деп аталады. Үшбұрыштың үш орта сызығы болады (63-сурет).



63-сурет



64-сурет

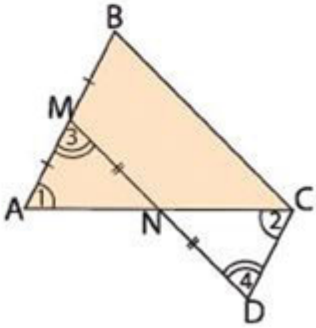
Теорема *(үшбұрыштың орта сызығының қасиеті).* **Үшбұрыштың орта сызығы үшбұрыштың үшінші қабырғасына параллель және оның жартысына тең.**

Дәлелдеуі. AC қабырғасының ортасы болатын E нүктесі арқылы $ED \parallel AB$ жүргіземіз. Сонда Фалес теоремасы бойынша $CD = DB$ болады (64-сурет). Бұдан ED ACB үшбұрышының орта сызығы және $ED \parallel AB$ болатыны шығады. Үшбұрыштың тағы бір DF орта сызығын жүргіземіз, $DF \parallel AC$. $AEDF$ төртбұрышы параллелограмм болады. Параллелограмның қасиеті бойынша $ED = AF$, ал Фалес теоремасы бойынша $AF = FB$ болғандықтан, $ED = \frac{1}{2}AB$ болады. Теорема дәлелденді.

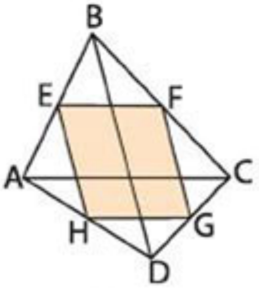
Фалес теоремасынан шығатыны, *ұштары үшбұрыштың екі қабырғасында жататын кесінді оның үшінші қабырғасына параллель және ұштарының бірі қабырғаның ортасы болса, онда ол үшбұрыштың орта сызығы болады.*

1-есеп. ABC үшбұрышының AB қабырғасының ортасы болатын M нүктесінен BC қабырғасына параллель және AC қабырғасын N нүктесінде қиятын түзу жүргізілген (65-сурет). Осы түзуден $ND = MN$ болатындай кесінді алынған. $ND = \frac{1}{2}BC$, $\angle NAM = \angle DCN$, $\angle AMN = \angle NDC$ болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $AN = NC$ (Фалес теоремасы бойынша). Бұдан MN – ABC үшбұрышының орта сызығы және $MN = \frac{1}{2}BC = ND$ болатыны шығады. Үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $\Delta AMN = \Delta CDN$ ($MN = ND$, $AN = NC$, $\angle ANM = \angle CND$). Тең үшбұрыштардың тең қабырғаларына қарсы тең бұрыштар жататындықтан $\angle 1 = \angle 2$, ал $\angle 3 = \angle 4$.



65-сурет



66-сурет

2 - е с е п. Диагональдары a және b болатын төртбұрыш берілген. Төбелері берілген төртбұрыштың қабырғаларының орталары болатын төртбұрыштың түрін анықтап, периметрін табу керек.

Ш е ш у і. $ABCD$ төртбұрышында $AC = a$, $BD = b$; E, F, G, H нүктелері – оның қабырғаларының орталары болсын (66-сурет). ΔABC-ның EF орта сызығын жүргізейік. Сонда $EF \parallel AC$ және $EF = 0,5 \cdot AC = 0,5a$ болады. ADC үшбұрышының GH орта сызығын жүргізейік. Сонда $GH \parallel AC$ және $GH = 0,5 \cdot AC = 0,5a$, $EF \parallel GH$ және $EF = GH$ болады. Демек, $EFGH$ төртбұрышы – параллелограмм (параллелограмның белгісі бойынша). Дәл осылай $FG = EH = 0,5b$ болады. Яғни, $EFGH$ параллелограмының периметрі $a + b$ болатыны шығады.

Ж а у а б ы. Параллелограмм, периметрі $a + b$.

СҰРАҚТАР

1. Үшбұрыштың орта сызығының анықтамасын беріңдер.

2. Үшбұрыштың орта сызығы туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

3. Үшбұрыш қабырғасының ортасы арқылы басқа қабырғасына параллель жүргізілген түзу үшінші қабырғасын қақ бөлетінін дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

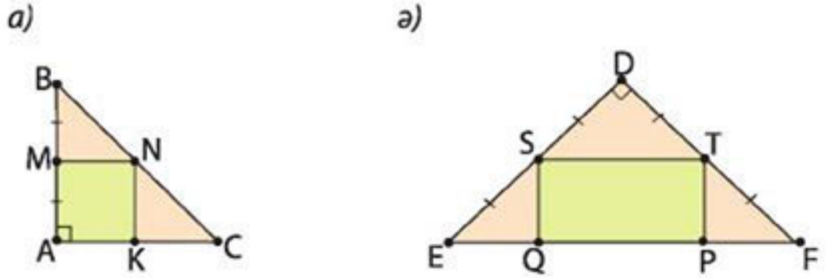
А деңгейі

109. Тіктөртбұрыш диагональдарының қиылысу нүктесінен ұзын қабырғасына дейінгі қашықтық 2,5 см. Тіктөртбұрыштың кіші қабырғасын табыңдар.

110. Қабырғаларының ұзындықтары 8 см, 5 см, 7 см болатын үшбұрыш берілген. Төбелері берілген үшбұрыштың қабырғаларының орталары болатын үшбұрыштың периметрін табыңдар.

В деңгейі

111. а) Үшбұрыштың катеті 6 см (67, *а*-сурет); ә) үшбұрыштың гипотенузасы 45 см (67, *ә*-сурет) болса, теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған тіктөртбұрыштың периметрін табыңдар.



67-сурет

112. Теңбүйірлі *ABC* үшбұрышының *AB* және *BC* қабырғалары тең. *ED* орта сызығы *AC* қабырғасына, ал *DF* орта сызығы *AB* қабырғасына параллель. *BED* және *DFC* үшбұрыштарының тең екенін дәлелдеңдер.

113. а) Тіктөртбұрыштың қабырғаларының орталары ромбтың төбелері болатынын;

ә) ромб қабырғаларының орталары тіктөртбұрыштың төбелері болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

114. а) Сынып тақтасында бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері белгіленген. Циркуль мен сызғыштың көмегімен үшбұрыштың орта сызығының қасиетін пайдаланып, A нүктесі арқылы BC түзуіне параллель түзу жүргізіңдер.

ә) Циркуль мен сызғыштың көмегімен берілген үш нүкте қабырғаларының орталары болатын үшбұрыш салыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

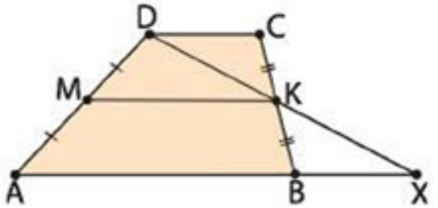
Трапеция салып, оның бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесінді жүргізіңдер. Осы кесінді мен трапецияның табандарын өлшеңдер. Кесіндінің ұзындығын трапеция табандары ұзындықтарының қосындысымен салыстырыңдар.

11. Трапецияның орта сызығы

Трапецияның орта сызығы деп оның бүйір қабырғаларының орталарын қосатын кесіндіні айтады.

Теорема. **Трапецияның орта сызығы оның табандарына параллель және олардың қосындысының жартысына тең.**

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышы – $AB \parallel DC$ және MK орта сызығы болатын трапеция болсын (68-сурет). AB сәулесін X нүктесінде қиятын DK сәулесін жүргізейік. Сонда үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі бойынша $\Delta DCK = \Delta XBK$ (теореманың шарты бойынша $CK = KB$, $\angle CKD = \angle BKX$ – вертикаль бұрыштар, $\angle DCK = \angle KBX$ – $DC \parallel AB$ мен CB қиюшыдан жасалған айқыш бұрыштар). Бұдан $DK = KX$ болатыны шығады.

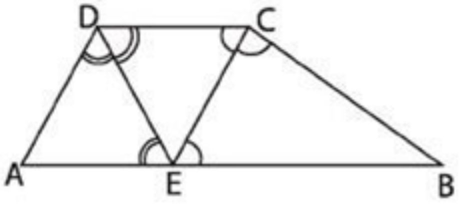


68-сурет

Сондықтан, MK ADX үшбұрышының орта сызығы болады. Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті бойынша $MK \parallel AX$. $AX \parallel DC$ болғандықтан, $MK \parallel DC$ (MK және DC түзулері AX түзуіне параллель болғандықтан, олар өзара параллель болады). Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті бойынша $MK = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}(AB + BX)$. BX кесіндісін оған тең DC кесіндісімен алмастырып, $MK = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC)$ теңдігін аламыз. Теорема дәлелденді.

1-есеп. Егер трапецияның кіші табанындағы бұрыштарының биссектрисалары оның үлкен табанында қиылысатын болса, онда трапецияның үлкен табанының ұзындығы оның бүйір қабырғаларының ұзындықтарының қосындысына тең болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ трапециясы берілген болсын. E нүктесі D және C бұрыштарының DE және CE биссектрисаларының қиылысу нүктесі болсын (69-сурет). $AB = AD + BC$ болатынын дәлелдейік.



69-сурет

1) $DC \parallel AB$, DE – қиюшы, сондықтан $\angle CDE = \angle AED$ – ішкі айқыш бұрыштар. ΔDAE – теңбүйірлі, себебі $\angle ADE = \angle AED$, бұдан $AE = AD$ екені шығады.

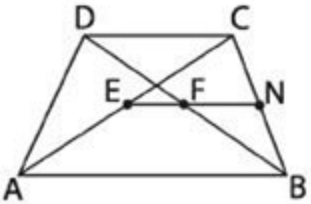
2) $DC \parallel AB$, CE – қиюшы, сондықтан $\angle DCE = \angle BEC$ – ішкі айқыш бұрыштар. ΔCBE – теңбүйірлі, себебі $\angle BCE = \angle BEC$, бұдан $BE = BC$ екені шығады.

3) $AB = AE + EB = AD + BC$, дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. Трапеция диагональдарының ортасын қосатын кесінді оның табандарының айырымының жартысына тең болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ трапециясы берілген болсын. E және F нүктелері – AC және BD диагональдарының орталары (70-сурет). $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$ болатынын дәлелдейік.

1) CB бүйір қабырғасының ортасын N нүктесімен белгілеп, FN кесіндісін жүргізейік. $CE = EA$ болғандықтан, EN кесіндісі ACB үшбұрышының орта сызығы болады, сондықтан $EN = \frac{1}{2}AB$.



70-сурет

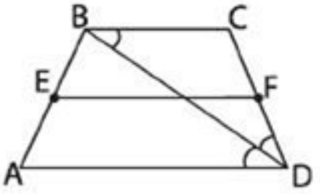
2) $BF = FD$, $BN = NC$ болғандықтан, FN кесіндісі DBC үшбұрышының орта сызығы болады, сондықтан $FN = \frac{1}{2}DC$.

3) $EN \parallel AB$ және $EN \parallel DC$ болғандықтан, F нүктесі EN кесіндісінде жатады, ал N – BC-ның ортасы, сонда Фалес теоремасы бойынша NE BD түзуін тең кесінділерге бөледі, яғни BD-ның ортасы болатын F нүктесінен өтеді.

4) $EF = EN - FN = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB - DC)$, дәлелдеу керегі де осы еді.

3 - е с е п. Теңбүйірлі трапецияның диагоналі оның сүйір бұрышын қақ бөледі. Трапецияның периметрі 112 см, ал табандары 3 : 5 қатынасындай. Трапецияның орта сызығының ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCD$ теңбүйірлі трапеция болсын, $AB = DC$, DB – оның диагоналі, $\angle ADB = \angle CDB$, EF – орта сызығы. $\frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}$ (71-сурет). Бір бөліктің ұзындығы x см болсын, сонда $BC = 3x$ см, $AD = 5x$ см болады. $BC \parallel AD$, BD қиюшы болғандықтан, ішкі айқыш бұрыштары $\angle ADB = \angle CBD$ болады. ΔCBD – теңбүйірлі, себебі, $\angle CDB = \angle CBD$. Яғни, $BC = DC = 3x$ см, ал трапеция теңбүйірлі болғандықтан $AB = 3x$ см болады.



71-сурет

Есептің шарты бойынша $AB + BC + CD + AD = 112$ см.

Бұдан $3x + 3x + 3x + 5x = 112$, $14x = 112$, $x = 8$ шығады.

Сонда $BC = 3 \cdot 8 = 24$ (см), $AD = 5 \cdot 8 = 40$ (см).

$EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(40 + 24) = 32$ (см) болады.

Ж а у а б ы. 32 см.

СҰРАҚТАР

1. Трапецияның орта сызығы дегеніміз не?

2. Трапецияның орта сызығы туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

115. Түзудің бір жағында жататын кесіндінің ұштары одан 6 см және 10 см қашықтықта жатыр. Кесіндінің ортасынан түзуге дейінгі қашықтықты табыңдар.

116. а) Трапецияның орта сызығы оның әрбір диагоналін қақ бөлетінін дәлелдеңдер.

ә) Трапецияның үлкен табанының ұзындығы 14 см. Диагональдарының орталарының арақашықтығы 3 см болса, оның кіші табанын табыңдар.

В деңгейі

117. Табандарының ұзындықтары 5 см және 14 см болатын трапеция берілген. Оның бір бүйір қабырғасын 3 тең бөлікке бөліңдер. Осы нүктелерді оның екінші бүйір қабырғасымен қосатын табанына параллель кесінділер жүргізіңдер. Осы кесінділердің ұзындықтарын табыңдар.

118. Трапецияның ұзындығы 16 см болатын орта сызығы оның диагоналімен ұзындықтарының айырымы 6 см болатын екі бөлікке бөлінген. Трапецияның табандарының ұзындықтарын табыңдар.

119. Теңбүйірлі трапецияның бүйір қабырғасының ұзындығы оның орта сызығына тең. Трапецияның периметрі 24 см. Бүйір қабырғасының ұзындығын табыңдар.

120. Тікбұрышты трапеция диагоналімен тікбұрышты үшбұрышқа және теңқабырғалы үшбұрышқа бөлінген. Теңқабырғалы үшбұрыштың периметрі 27 дм болса, трапецияның орта сызығын табыңдар.

121. а) Табандарының арақашықтығы 1 дм, ал диагональдары өзара перпендикуляр болатын теңбүйірлі трапецияның орта сызығын табыңдар.

ә) Трапецияның орта сызығы диагоналімен 2 см және 5 см кесінділерге бөлінеді. Оның әр бүйір қабырғасы 6 см болса, трапецияның бұрыштарын табыңдар.

С деңгейі

122. а) Трапецияның бір диагоналі орта сызығын 5 см және 10 см кесінділерге бөледі. Егер оның диагональдары сүйір бұрыштарының биссектрисалары болса, трапецияның периметрін табыңдар.

ә) Табандары AD және BC болатын $ABCD$ трапециясында $\angle D = 30°$, $BC = 10$ см. AB және DC түзулері тік бұрыш жасап қиылысады. Трапецияның орта сызығы 16 см болса, AB бүйір қабырғасын табыңдар.

123. Ұштары трапецияның бүйір қабырғаларына тиісті кесіндінің ұзындығы оның табандары қосындысының жартысына тең болса, ол кесінді трапецияның орта сызығы бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

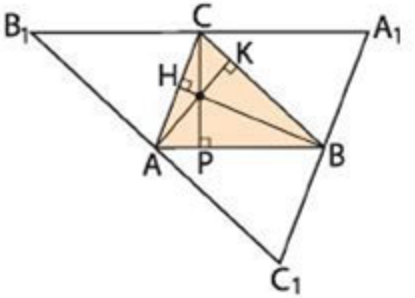
Доғалбұрышты үшбұрыш салып, оның барлық биіктіктерін тұрғызыңдар. Осы биіктіктерді қамтитын түзулердің өзара орналасуы туралы не айтуға болады?

12. Үшбұрыштың тамаша нүктелері

7-сыныпта үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбер туралы теореманы дәлелдеу барысында *үшбұрыштың қабырғаларына тұрғызылған орта перпендикулярлардың қиылысу нүктесі осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын* айтқан болатынбыз. Ал үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер туралы теоремада *үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесі оған іштей сызылған шеңбердің центрі болатынын* айтқанбыз.

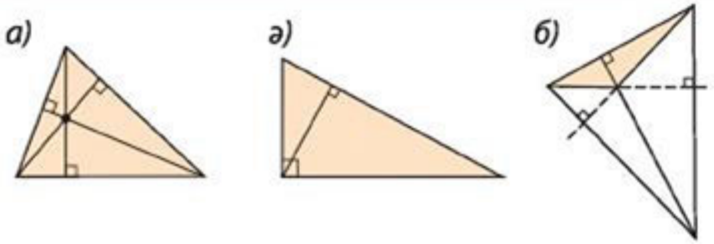
Теорема. **Үшбұрыштың биіктіктері жататын үш түзу бір нүктеде қиылысады.**

Дәлелдеуі. Кез келген ABC үшбұрышы берілсін, ал AK, BH, CP оның биіктіктері болсын. A, B, C төбелері арқылы оның қарама-қарсы қабырғаларына параллель түзулер жүргізіп, олардың қиылысу нүктелерін A_1, B_1, C_1 деп белгілейік (72-сурет). AB_1CB және ACA_1B параллелограмдарында қарама-қарсы $AB = B_1C = CA_1$ қабырғалары тең. Бұдан шығатыны, C нүктесі B_1A_1 қабырғасының ортасы болады.



72-сурет

Дәл осылай, ACA_1B және $ACBC_1$, CBC_1A және $CBAB_1$ параллелограмдарын қарастырып, B және A нүктелері, сәйкесінше, A_1C_1 және B_1C_1 қабырғаларының орталары болатынын анықтаймыз. Бұдан шығатыны ABC үшбұрышының AK, BH, CP биіктіктері жататын түзулер $A_1B_1C_1$ үшбұрышы қабырғаларының орта перпендикулярлары болады, ал мұндай түзулер бір нүктеде қиылысады. Теорема дәлелденді.



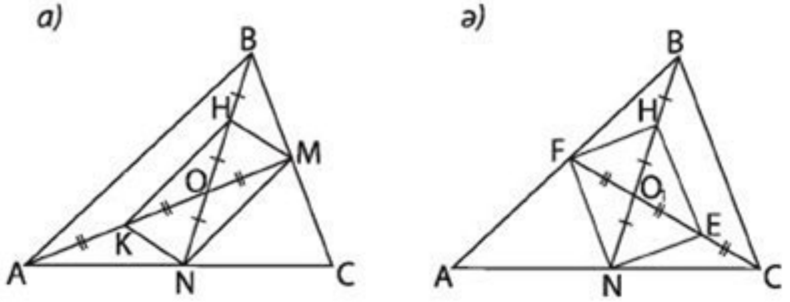
73-сурет

Үшбұрыштың биіктіктері жататын түзулердің қиылысу нүктесі *ортоцентр* деп аталады. Ол нүкте (73-сурет): а) үшбұрыш сүйір-бұрышты болса, үшбұрыштың ішінде; ә) үшбұрыш тікбұрышты болса, тік бұрышының төбесінде; б) үшбұрыш доғалбұрышты болса, үшбұрыштың сыртында жатады.

Теорема. **Үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде олардың әрқайсысы төбесінен бастап есептегенде 2 : 1 қатынасындай болып бөлінеді.**

Дәлелдеуі. ABC үшбұрышы берілсін. Оның AM және BN медианаларын жүргізіп, қиылысу нүктесін O деп белгілейік (74, *а*-сурет). Сонда MN кесіндісі ABC үшбұрышының орта сызығы болады. OB және OA кесінділерінің орталарын, сәйкесінше, H және K нүктелерімен белгілейік. HK кесіндісі – OAB үшбұрышының орта сызығы. Үшбұрыштың орта сызығының қасиеті бойынша $MN \parallel AB$, $MN = \frac{1}{2}AB$; $HK \parallel AB$, $HK = \frac{1}{2}AB$. Бұдан, $KHMN$ төртбұрышы параллелограмм және $OM = OK$, $OH = ON$ болатыны шығады. Сонымен $\frac{BO}{ON} = \frac{2}{1}$, $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$ қатынасындай болады.

ABC үшбұрышының CF медианасын жүргізейік. Оның BN медианасымен қиылысу нүктесін O_1 деп белгілейік (74, *ә*-сурет). O_1C кесіндісінің ортасын E деп белгілеп, $FHEN$ төртбұрышының параллелограмм болатыны шығады, ал O_1 нүктесі осы медианаларды төбесінен бастап есептегенде $2:1$ қатынасындай бөледі (өздігінен орындаңдар). Осыдан, O_1 нүктесінің O нүктесімен беттесетіні шығады, яғни үшбұрыштың медианалары бір нүктеде қиылысады және осы нүктеде төбесінен бастап есептегенде 2 : 1 қатынасындай бөлініп бөлінеді. Теорема дәлелденді.



74-сурет

Үшбұрыш *медианаларының*, қабырғаларының *орта перпендикулярларының*, *биіктіктері* жататын түзулерінің, *биссектрисаларының* қиылысу нүктелері үшбұрыштың ***тамаша нүктелері*** деп аталады.

СҰРАҚТАР

а) Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярларының бір нүктеде қиылысатынын; ә) үшбұрыш медианаларының бір нүктеде қиылысатынын; б) үшбұрыш биссектрисаларының бір нүктеде қиылысатынын; в) үшбұрыш биіктіктері жататын түзулердің бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

124. а) O нүктесі – ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрі. Егер $\angle AOB = 128°$ болса, C бұрышын табыңдар.

ә) Теңқабырғалы үшбұрыштың биіктігі 4,2 см. Үшбұрыш биссектрисаларының қиылысу нүктесінен қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңдар.

B деңгейі

125. ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбердің центрінен үшбұрыштың AC қабырғасына параллель PK түзуі жүргізілген ($P \in AB$, $K \in BC$). $PK = AP + KC$ болатынын дәлелдеңдер.

126. а) Үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрлері және үшбұрыштың төбелерінің бірі бір түзудің бойында жататын үшбұрыштың түрін анықтаңдар.

ә) Периметрі 60 см болатын теңқабырғалы үшбұрыш қиып алуға болатындай дөңгелектің ең кіші радиусын табыңдар.

127. ABC үшбұрышының AC және BC қабырғаларының орта перпендикулярлары AB қабырғасының O нүктесінде қиылысады. а) $AO = OB$; ә) $\angle C = \angle A + \angle B$ болатынын дәлелдеңдер.

128. а) Теңбүйірлі ABC үшбұрышының BC қабырғасы 20 см. BC қабырғасының орта перпендикуляры AC қабырғасын D нүктесінде қияды және ABD үшбұрышының периметрі 32 см. Үшбұрыштың AB табанының ұзындығын табыңдар.

ә) Теңбүйірлі ΔABC-ның $\angle A = 120°$, BM мен CN – медианалары, O – олардың қиылысу нүктесі. O нүктесінен $OK \parallel BC$ кесіндісі жүргізілген, $K \in AB$. Егер $BK = 4$ см болса, AO-ны табыңдар.

129. Теңбүйірлі үшбұрыштың екі медианасының ұзындықтары 8 см және 10 см. Бүйір қабырғасының ұзындығы 12 см болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

C деңгейі

130. а) Берілген a қабырғасы мен басқа екі қабырғасына жүргізілген m, n медианалары бойынша үшбұрыш салыңдар.

ә) Бексұлтан ABC үшбұрышын салып, медианаларының қиылысу нүктесін O деп белгіледі. Содан кейін ол A, B, O нүктелерінен басқасын өшірді де, Салтанатқа сол үшбұрышты қайта қалпына келтіруді ұсынды. Ол тапсырманы дұрыс орындады. Оны қалай істеді?

б) Нұргүл ABC үшбұрышын салып, AC мен BC қабырғаларының орталарын, сәйкесінше, M және N деп, ал AN мен BM кесінділерінің қиылысу нүктесін K деп белгіледі. Содан кейін ол M, N, K нүктелерінен басқасын өшірді де, Ержанға сол үшбұрышты қайта қалпына келтіруді ұсынды. Ол бұл есепті қалай шешуі мүмкін?

131. Центрі O нүктесінде, радиусы 3 см, AD диаметрі, $AB = 4$ см, $DC = 3$ см хордалары болатын, AD түзуінің бір жағында жататын шеңбер салыңдар. Сызғыштың көмегімен AB және DC түзулерінің қиылысу нүктесінен өтіп, AD-ға перпендикуляр болатын түзу жүргізіңдер.

13. «Көпбұрыштар. Төртбұрыштарды зерттеу» тақырыбын қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

132. а) 1) Теңбүйірлі үшбұрыштың қабырғаларының орталары басқа теңбүйірлі үшбұрыштың төбелері болады; 2) егер кесінді үшбұрыштың қабырғасына параллель және оның жартысына тең болса, онда ол үшбұрыштың орта сызығы болады деген тұжырым дұрыс па? Жауабын негіздеңдер.

ә) Үшбұрыштың төбелері оның екі қабырғасының ортасы арқылы өтетін түзуден бірдей қашықтықта жататынын дәлелдеңдер.

б) ADC бұрышы 150°-қа, B нүктесінен AD және DC қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының қосындысы 9 см-ге тең болатын $ABCD$ параллелограмының периметрін табыңдар.

В деңгейі

Көкшетау табиғи саябағы

133. Қазақстанның «Көкшетау» ұлттық саябағында қанша табиғи ескерткіштер бар екені мына есептің жауабындағы сан арқылы өрнектеледі: «Бір бұрышы 120°-қа, ал кіші диагоналі 3,25 см-ге тең болатын ромбтың периметрін табыңдар».

134. а) Шеңбердің бір нүктесінен өзара перпендикуляр екі хорда жүргізілген. Шеңбердің центрінен хордаларға дейінгі қашықтықтар 2 см және 5 см болса, хордалардың ұзындықтарын табыңдар.

ә) Бір бұрышы 120°-қа, бүйір қабырғасы 4 см-ге тең болатын теңбүйірлі үшбұрыш берілген. Осы үшбұрышқа оның табанын қамтитын түзуге қарағанда симметриялы болатын үшбұрыш салыңдар. Шыққан төртбұрыштың түрін анықтап, оның кіші диагоналін табыңдар.

135. Дөңес төртбұрыш берілген. Қандай шарт орындалғанда, төбелері берілген төртбұрыш қабырғаларының орталары болатын төртбұрыш: а) тіктөртбұрыш; ә) ромб; б) шаршы болады?

136. а) $ABCD$ параллелограмының AL биссектрисасы BC қабырғасын $BL = 3$ см, $LC = 5$ см кесінділерге бөледі. $ALCD$ төртбұрышының трапеция болатынын дәлелдеңдер және оның орта сызығының ұзындығын табыңдар.

ә) $ABCD$ ромбысының диагональдары O нүктесінде қиылысады. M және N нүктелері, сәйкесінше, оның AD мен CD қабырғаларының орталары. Егер $AB = 5$ см болса, $MOND$ төртбұрышының периметрін табыңдар.

б) ABC үшбұрышының AB мен BC қабырғаларына, сәйкесінше, M және N нүктелері $BM : MA = BN : NC = 1 : 2$ болатындай белгіленген. Егер $AC = 12$ см болса, MN-ді табыңдар.

137. а) Трапецияның табандары c және p болсын ($p > c$). Трапеция диагональдарының орталарын қосатын кесіндінің ұзындығын табыңдар.

ә) Берілген кесіндіні: 1) 1 : 2; 2) 3 : 4 тең болатындай екі бөлікке бөліңдер.

б) Егер $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ болса, онда: 1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ болатынын дәлелдеңдер.

С деңгейі

138. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген екі биіктігінің табан нүктелерін қосатын кесінді үшбұрыштың табанына параллель болатынын; ә) қабырғалары c және p ($c > p$) болатын параллелограмм бұрыштарының биссектрисалары қиылысқанда диагоналі $(c - p)$-ға тең болатын тіктөртбұрыш жасайтынын; б) төртбұрыштың диагональдарының орталары мен қарама-қарсы қабырғаларының орталары арқылы өтетін түзулердің қиылысу нүктесі бір түзуде жататынын дәлелдеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

139. 1А) $ABCD$ ромбысының CAD бұрышы 35°-қа тең. Ромбтың бұрыштарын табыңдар.

2В) Табандары AD және BC болатын $ABCD$ трапециясының C нүктесі арқылы AD табанын E нүктесінде қиятын, AB бүйір қабырғасына параллель түзу жүргізілген. $AD = 12$ см, $DE = 4$ см, ал трапецияның периметрі 33 см. $ABCE$ параллелограмм болатынын дәлелдеңдер және DEC үшбұрышының периметрін табыңдар.

3В) $ABCD$ параллелограмының диагональдарының O қиылысу нүктесінен бастап OA сәулесіне $OM = OB$, ал OC сәулесіне $OH = OB$ кесінділері салынған. $MBHD$ төртбұрышының тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

4С) Ұзын табаны AD болатын $ABCD$ трапециясында $AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Егер трапецияның периметрі 20 см, $\angle D = 60°$ болса, AD кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

5С) $ABCD$ трапециясы берілген. Циркуль мен сызғыштың көмегімен орта сызығының үштен біріне тең болатын кесінді салыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Тік бұрышы C болатын ABC тікбұрышты үшбұрышын салыңдар. Оның гипотенузасының қайсыбір D нүктесінен AC катетіне DH перпендикулярын жүргізіңдер. AC, AB, AH және AD кесінділерін өлшеңдер. $\frac{AC}{AB}$ мен $\frac{AH}{AD}$ қатынастарын салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Төртбұрыштар мен олардың қасиеттері туралы Евклидтің «Негіздерінің» бастапқы алты кітабында сөз болады. Теория қазіргіден ерекше баяндалады. Әр кітапта алдымен барлық анықтамалар (20-ға дейін және одан да көп) беріледі, сонан соң «сөйлемдер» деп аталатын теоремалар тұжырымдалады. Теоремалардың дәлелдеуі баяндау арқылы беріледі. Мәтін туралы түсінікті бірінші кітаптағы келесі мысалдардан көруге болады:

«22-анықтама. Төртқабырғалы фигуралардың ішінде теңқабырғалысы және тікбұрыштысы шаршы болып табылады. 34-сөйлем. Параллель сызықтар арқылы пайда болған аудандардың (параллелограмдардың) қарама-қарсы қабырғалары мен бұрыштары тең».

Бірнеше ғасыр бойы Евклидтің «Негіздері» көп елде қайта жазылып, қайта басылып шықты. Ол адамдардың геометрия туралы түсініктерін кеңейткен. Геометрия ғылымының дамуына зор үлес қосқан Рене Декарт, Николай Иванович Лобачевский т. с. с. танымал ғалымдар геометрияны сол кітаптан оқып-үйренген.

Евклидтің «Негіздері» және сол кітаптың геометрия ғылымының дамуына қосқан үлесі туралы мәлімет табыңдар.

Р. Декарт

Н. И. Лобачевский

II. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫСТАР

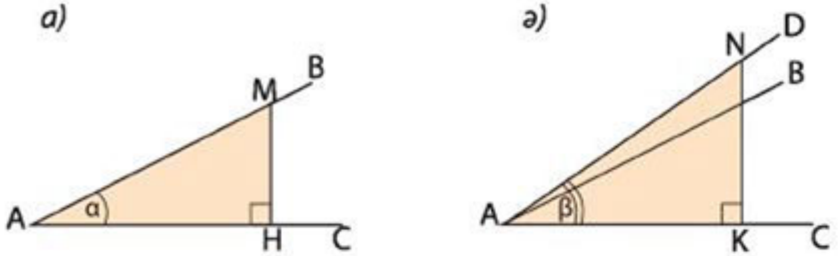
Тарауды оқу барысында

• сүйір бұрыштың синусының, косинусының, тангенсінің және котангенсінің анықтамаларын;
• Пифагор теоремасын және оған кері теореманы;
• негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді және олардың салдарын;
• тригонометриялық функциялардың 30°, 45°, 60° бұрыштардағы мәндерін;
• тікбұрышты үшбұрыштарды шешудің негізгі әдістерін **білу керек.**

• тригонометриялық функциялардың 0°-тан 90°-қа дейінгі мәндерін таба алу;
• бұрыштардың тригонометриялық функцияларының берілген мәндері бойынша сол бұрыштарды сала алу;
• Пифагор теоремасын дәлелдей алу;
• Пифагор теоремасы мен оған кері теореманы, тригонометриялық тепе-теңдіктер мен сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларының қасиеттерін есеп шығаруға қолдана алу;
• сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларын тікбұрышты үшбұрыштың элементтерін табуда қолдана **алу керек.**

14. Сүйір бұрыштың косинусы

Қандай да бір сүйір бұрыш алайық, мысалы, $\angle BAC = \alpha$ (75, *а*-сурет). *AB* қабырғасына қандай да бір *M* нүктесін белгілеп, осы нүктеден *AC* қабырғасына *MH* перпендикулярын жүргізсек, тікбұрышты *MAH* үшбұрышы шығады. Пропорционал кесінділер туралы теорема бойынша, $\frac{AH}{AM}$ қабырғаларының қатынасы *M* нүктесін таңдап алуға тәуелді емес. β-ға тең болатын басқа *DAC* сүйір бұрышын алып (75, *ә*-сурет), дәл осылай *AD* қабырғасынан алынған *N* нүктесіне тәуелді емес $\frac{AK}{AN}$ қатынасын аламыз. Яғни, тікбұрышты үшбұрыштың әрбір сүйір бұрышына тек бір ғана осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасы сәйкес келеді. Бұл қатынас үшбұрыштың сүйір бұрышының *косинусы* деп аталады.

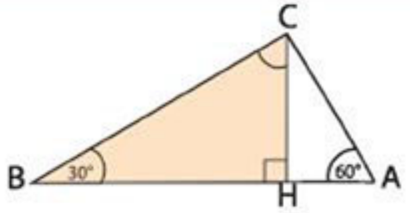


75-сурет

Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына іргелес жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын сол бұрыштың **косинусы** деп атайды. Белгіленуі: cos *A* (немесе $\cos\angle A$, немесе $\cos\angle MAH$ (75, *а*-сурет)).

Е с е п. *ABC* тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, *CH* – биіктігі (76-сурет). а) $\cos\angle BCH = \cos\angle A$ болатынын дәлелдеу керек; ә) $\cos\angle BCH$ табу керек.

Ш е ш у і. $\angle B = 30°$ болғандықтан, $\angle BCH = 60°$. Бұдан шығатыны, $\cos\angle BCH = \cos\angle A$. *BHC* тікбұрышты үшбұрышының *CH* катеті *BC* гипотенузасының жартысына тең. Сонда $\cos\angle BCH = \frac{CH}{BC} = \frac{0,5BC}{BC} = 0,5$.



76-сурет

Ж а у а б ы. 0,5.

СҰРАҚТАР

1. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының косинусы дегеніміз не?
2. Егер бір тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышы екінші тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына тең болса, онда осы бұрыштардың косинустары тең болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

140. Тікбұрышты ΔABC-да $\angle C = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, MN – үшбұрыштың орта сызығы ($M \in AB$, $N \in CB$). а) $\angle A$; ә) $\angle NMB$ бұрышының косинусын табыңдар.

141. Теңбүйірлі ΔMNK-ның табаны $MK = 10$ см, $NK = 13$ см, $A \in MN$, $B \in NK$ және $AB \parallel MK$, $MA : AN = 3 : 2$. а) $\angle M$; ә) $\angle NBA$ бұрышының косинусын табыңдар.

142. а) Тікбұрышты ΔDFG-ның $\angle G = 90°$, $\angle D = 30°$, $\angle F$-тің косинусын табыңдар.

ә) Теңқабырғалы үшбұрыштың бұрышының косинусын табыңдар.

В деңгейі

143. Қабырғасы 1-ге тең $ABCD$ шаршысы берілген және оның $\sqrt{2}$-ге тең BD диагоналі жүргізілген. BDA бұрышының косинусы неге тең?

144. ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, $CB = 12$ см. а) Кіші сүйір бұрышының косинусын;

ә) сүйір бұрыштарының косинустары квадраттарының қосындысын табыңдар.

145. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 15 см, ал катеттері – 9 см және 12 см. а) Үлкен сүйір бұрышының косинусын; ә) сүйір бұрыштарының косинустарының қосындысын табыңдар.

146. а) Тікбұрышты үшбұрыштың катеті 8 см, ал оған іргелес сүйір бұрышының косинусы 0,8-ге тең. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасын табыңдар. ә) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 15 см, ал бір сүйір бұрышының косинусы 0,6-ға тең. Осы бұрышқа іргелес жатқан катеттің ұзындығын табыңдар.

C деңгейі

147. а) *BAC* сүйір бұрышының *AB* қабырғасынан ұзындығы 10 см болатын *AK* кесіндісі алынған және осы кесіндінің ортасы *M* нүктесімен белгіленген. *MK* кесіндісінің *AC* түзуіндегі проекциясы 3 см-ге тең болса, *BAC* бұрышының косинусын табыңдар.

ә) Ұзындығы 12 см болатын *AB* кесіндісі *M* және *N* нүктелерімен үш тең бөлікке бөлінген. *MN* кесіндісінің *AC* сәулесіндегі проекциясы 2 см болса, *BAC* бұрышының косинусын табыңдар.

б) Периметрі 40 см *MNPK* шаршысының әрбір қабырғасына онымен ортақ ішкі нүктесі болмайтын теңқабырғалы үшбұрыштар салынған. Төбелері осы үшбұрыштардың үшінші төбелері болатын *ABCD* төртбұрышының периметрін (0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен) табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Тікбұрышты үшбұрыш салып, оның катеттері мен гипотенузасын өлшеңдер. Осы үшбұрыштың катеттері ұзындықтарының квадраттарының қосындысын гипотенузасының ұзындығының квадратымен салыстырыңдар.

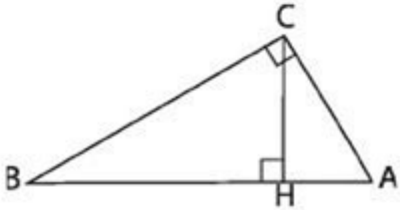
15. Пифагор теоремасы және оған кері теорема

Пифагор теоремасы (*б. з. д. VI г. өмір сүрген ежелгі грек ғалымы*). **Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының ұзындығының квадраты катеттерінің ұзындықтарының квадраттарының қосындысына тең.**

Дәлелдеуі. Тік бұрышы C болатын ABC тікбұрышты үшбұрышы берілген болсын.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ болатынын дәлелдейік.

Үшбұрыштың CH биіктігін жүргізейік (77-сурет). AHC және ACB тікбұрышты үшбұрыштарын қарастырайық. Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының косинусының анықтамасы бойынша: $\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$, бұдан $AC^2 = AB \cdot AH$ шығады.



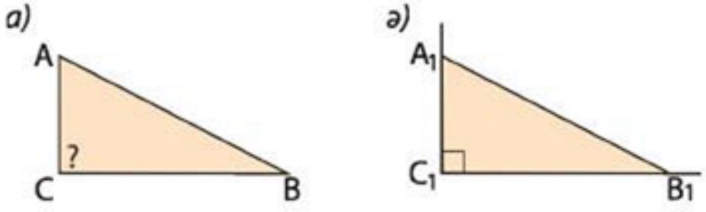
77-сурет

BHC және BCA тікбұрышты үшбұрыштарынан мынаны аламыз: $\cos B = \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$, бұдан $BC^2 = AB \cdot BH$.

Онда $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AH + AB \cdot BH = AB \cdot (AH + BH) = AB \cdot AB = AB^2$. Теорема дәлелденді.

Пифагор теоремасын дәлелдегенде $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$ және $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$ пропорцияларын пайдаландық. Мұндай пропорцияларда AC мен BC кесінділері, сәйкесінше, AH, AB және BH, AB кесінділерінің пропорционалдық ортасы деп аталады. Сонымен, тікбұрышты үшбұрыштың *катеті гипотенуза мен сол катеттің гипотенузаға түскен проекциясының пропорционалдық ортасы* болатыны белгілі болды.

Т е о р е м а (*Пифагор теоремасына кері теорема*). **Егер үшбұрыштың бір қабырғасының квадраты оның басқа екі қабырғасының квадраттарының қосындысына тең болса, онда мұндай үшбұрыш тікбұрышты болады.**

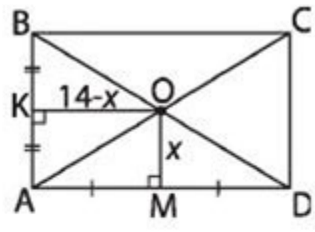


78-сурет

Д ә л е л д е у і. ABC үшбұрышының (78-сурет) қабырғалары үшін $AB^2 = AC^2 + CB^2$ теңдігі орындалатын болсын. $\angle C = 90°$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін C_1 тік бұрышын және оның қабырғаларына $C_1A_1 = CA$ және $C_1B_1 = CB$ кесінділерін салайық. Пифагор теоремасы бойынша $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + C_1B_1^2$ немесе $A_1B_1^2 = AC^2 + CB^2 = AB^2$ болады. Сондықтан $AB = A_1B_1$. Сонда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (үш қабырғасы бойынша). Бұл үшбұрыштардың теңдігінен шығатыны, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Ендеше, ΔABC – тікбұрышты. Теорема дәлелденді.

Е с е п. Тіктөртбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 4 см ұзын, ал диагональдарының қиылысу нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының қосындысы 14 см. Тіктөртбұрыштың диагоналінің ұзындығын табу керек.

Ш е ш у і. Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ тіктөртбұрышы берілсін (79-сурет). O нүктесінен AD және AB қабырғаларына OM және OK перпендикулярларын жүргізейік. $OM = x$ см деп белгілесек, онда $OK = (14 - x)$ см болады. Тіктөртбұрыштың диагональдары тең және қиылысу нүктесінде қақ бөлінетіндіктен, AOB және AOD теңбүйірлі үшбұрыштарының OK және OM биіктіктері әрі медианалары болады, яғни K және M нүктелері – ABD үшбұрышы-



79-сурет

ның AB және AD қабырғаларының орталары. Бұдан шығатыны, KO және OM кесінділері – ABD үшбұрышының орта сызықтары. Сонда $AB = 2 \cdot OM = 2x$ см, $AD = 2 \cdot KO = (28 - 2x)$ см.

Есептің шарты бойынша, $AD - AB = 4$ см, яғни $28 - 2x - 2x = 4$, бұдан $x = 6$. Сонда $AB = 12$ см, $AD = 16$ см. $ABCD$ тіктөртбұрышының BD диагоналін ABD үшбұрышынан Пифагор теоремасы бойынша табамыз: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 16^2 = 400$, яғни $BD = 20$ см.

Ж а у а б ы. 20 см.

СҰРАҚТАР

1. Пифагор теоремасын тұжырымдап, дәлелдеңдер.
2. Пифагор теоремасына кері теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

148. а) Пифагор теоремасына сүйеніп, қабырғалары 6 см, 8 см және 10 см болатын үшбұрыш тікбұрышты деп тұжырымдауға бола ма?

ә) Қабырғалары 12 см, 15 см және 9 см болатын үшбұрыш тікбұрышты бола ма? Егер болса, оны қай теоремаға сүйене отырып айтуға болады?

б) 1,5 м, 2 м және 2,5 м болатын ұзындықтары түйінмен белгіленген жіпті пайдаланып, жерге тікбұрышты қалай салуға болады?

149. а) Егер ұзын қабырғасы a, ал қалған екі қабырғасы b және c болатын үшбұрыш үшін $c^2 + b^2 = a^2$ теңдігі орындалмаса, онда ол тікбұрышты үшбұрыш емес деген тұжырым дұрыс па?

ә) Егер тікбұрышты үшбұрыштың әрбір катеті n есе ұзарса, оның гипотенузасы неше есе ұзарады?

б) Егер тікбұрышты үшбұрыштың әрбір катетін 10 %-ға үлкейтсе, оның гипотенузасы неше пайызға үлкейеді?

150. а) Тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың гипотенузасы 3 дм. Осы үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

ә) Тікбұрышты ΔABC-да $\angle C = 90°$, $AC = 3$ дм, $\cos B = \frac{8}{17}$. CB мен AB-ны табыңдар.

В деңгейі

151. а) Теңбүйірлі трапецияның табандары 8 дм және 14 дм, ал биіктігі 4 дм. Трапецияның бүйір қабырғаларын табыңдар.

ә) Егер тіктөртбұрыштың периметрі 56 см, ал қабырғаларының ұзындықтарының айырымы 4 см болса, диагоналін табыңдар.

б) Қабырғалары 7 см және 24 см болатын $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген. Оның A және C төбелеріне BD түзуіне қарағанда симметриялы болатын A_1 және C_1 нүктелері салынған. AA_1CC_1-дің тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеп, оның A_1C_1 диагоналін табыңдар.

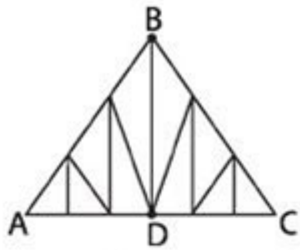
152. а) Ромбтың диагональдары 6 дм және 8 дм. Ромбтың қабырғаларын табыңдар.

ә) Ромбтың периметрі 52 см, бір диагоналі 10 см. Ромбтың екінші диагоналін табыңдар.

153. а) Ұзындығы 13 м болатын саты қабырғаға тірелген. Оның бір басының қабырғадан арақашықтығы 5 м. Сатының екінші басы қандай биіктікте тұр?

ә) Ұзындығы 5 м-ге тең басқыш бір ұшымен қабырғаға тірелген, ал екінші ұшы қабырғадан 3 м жерде орналасқан. Егер басқыштың екінші ұшын қабырғаға 1 м жақындатса, оның бірінші ұшы да сонша биікке көтеріле ме?

154. Үйдің екіжақты шатырының (80-сурет) AB және BC тақтайларының ұзындықтары 15 м, олар тірелетін арқалығының ұзындығы 24 м. Шатырдың BD биіктігін табыңдар.



80-сурет

155. Ромбтың доғал бұрышынан қабырғасына түсірілген перпендикуляр оны 4 см және 8 см кесінділерге бөледі. Ромбтың диагональдарын табыңдар.

156. $ABCD$ төртбұрышында $BC = 15$ см, $CD = 9$ см, $AD = 13$ см, $BD = 12$ см, $\angle CDB = \angle ABD$. AB қабырғасын табыңдар.

157. а) Қабырғасы 12 см болатын $ABCD$ шаршысының AB және AD қабырғаларының орталарын, сәйкесінше, M және K деп белгілеген. MCK үшбұрышының қабырғаларын табыңдар.

ә) ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $BC = 5$ см, $M \in AC$ және $CM : AM = 1 : 2$. AB-ға параллель болатын MN кесіндісінің ұзындығын табыңдар, мұндағы $N \in BC$.

б) $ABCD$ тіктөртбұрышында $AD = 3$ см, $AB = 2$ см, N – CD қабырғасының ортасы, $M \in BC$ және $BM : MC = 2 : 1$. AMN үшбұрышының тікбұрышты болатынын дәлелдеп, оның кіші сүйір бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

158. а) Параллелограмның төбесінен оның диагоналіне жүргізілген перпендикуляр осы диагональды 6 дм және 15 дм кесінділерге бөледі. Параллелограмм қабырғаларының айырымы 7 дм болса, сол қабырғаларды табыңдар.

ә) $ABCD$ тіктөртбұрышы мен BC қабырғасында X нүктесі берілген. $AX^2 + XC^2 = BX^2 + XD^2$ болатынын дәлелдеңдер.

б) $ABCD$ тіктөртбұрышында $AB = 2$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см. Оның AC диагоналіне BH перпендикуляры тұрғызылған. $AH : HC$ қатынасын табыңдар.

в) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 см және 4 см. Оның гипотенузаға түсірілген биіктігін табыңдар.

С деңгейі

159. а) Радиусы 10 см болатын шеңберге жанама жүргізілген. Жанаманың A нүктесінен шеңберге дейінгі ең жақын қашықтық 16 см. A нүктесінен жанасу нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Бүйір қабырғасы 6 см, табаны 4 см болатын теңбүйірлі үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын (0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен) табыңдар.

б) Радиустары 17 см және 10 см-ге тең, ал центрлерінің арақашықтығы 21 см болатын екі шеңбердің қиылысу нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

160. а) Қағаздан қабырғалары 9 см және 4 см болатын тіктөртбұрыш қиып алыңдар. Оны шаршы құрастыруға болатындай етіп үш тіктөртбұрышқа бөліңдер.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың үш еселенген гипотенузасы оның екі еселенген катеттерінің қосындысынан артық болатынын дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Тік бұрышы C болатын ABC тікбұрышты үшбұрышын салыңдар. Оның гипотенузасының қайсыбір D нүктесінен AC катетіне DH перпендикулярын жүргізіңдер. AC, AB, AH және AD кесінділерін өлшеңдер. а) $\frac{BC}{AB}$ және $\frac{DH}{AD}$; ә) $\frac{BC}{AC}$ және $\frac{DH}{AH}$; б) $\frac{AC}{BC}$ және $\frac{AH}{DH}$ қатынастарын салыстырыңдар.

16. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары

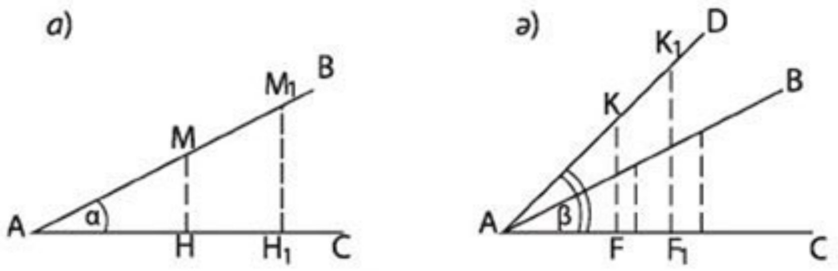
Сүйір $\angle BAC = \alpha$ бұрышы берілсін (81, *a*-сурет). Бұрыштың AB қабырғасына M нүктесін белгілеп, осы нүктеден AC қабырғасына MH перпендикулярын түсірейік. Пифагор теоремасын пайдаланып, тікбұрышты MAH үшбұрышының $\dfrac{MH}{AM}$ қабырғаларының қатынасы M нүктесіне тәуелді емес екенін дәлелдейік.

$$\frac{MH}{AM} = \frac{\sqrt{AM^2 - AH^2}}{AM} = \sqrt{1 - \left(\frac{AH}{AM}\right)^2};$$

$$\frac{M_1H_1}{AM_1} = \frac{\sqrt{AM_1^2 - AH_1^2}}{AM_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{AH_1}{AM_1}\right)^2}.$$

$\dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AH_1}{AM_1} = \cos\alpha$ болғандықтан, $\sqrt{1 - \left(\dfrac{AH}{AM}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{AH_1}{AM_1}\right)^2}$ болады, бұдан шығатыны, $\dfrac{MH}{AM} = \dfrac{M_1H_1}{AM_1}$.

Екінші $\angle DAC = \beta$ сүйір бұрышын алсақ (81, *ә*-сурет), дәл солай, $\dfrac{KF}{AK}$ қатынасы AD қабырғасынан алынған K нүктесіне тәуелді емес екені шығады. Яғни, тікбұрышты үшбұрыштың әрбір сүйір бұрышына тек бір ғана оған қарсы жататын катеттің гипотенузаға қатынасы сәйкес келеді. Бұл қатынас тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының *синусы* деп аталады.



81-сурет

Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына қарсы жатқан катеттің гипотенузаға қатынасын сол бұрыштың **синусы** деп атайды.

Белгіленуі: $\sin A$, мысалы, $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$ (82-сурет).

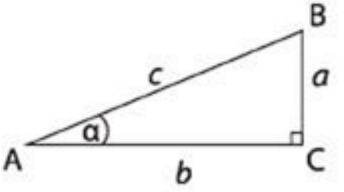
$\frac{AH}{AM} = \frac{AH_1}{AM_1}$ және $\frac{MH}{AM} = \frac{M_1H_1}{AM_1}$ теңдіктерінен $\frac{MH}{AH} = \frac{M_1H_1}{AH_1}$ және $\frac{AH}{MH} = \frac{AH_1}{M_1H_1}$ теңдіктері шығады. Яғни бұл қатынастар M нүктесіне тәуелді емес, оларды, сәйкесінше, тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының *тангенсі* және *котангенсі* деп атайды.

Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына қарсы жатқан катеттің іргелес жатқан катетке қатынасын сол бұрыштың **тангенсі** деп атайды. Белгіленуі: tg A, мысалы, tg $A = \frac{BC}{AC}$ (82-сурет).

Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышына іргелес жатқан катеттің қарсы жатқан катетке қатынасын сол бұрыштың **котангенсі** деп атайды. Белгіленуі: ctg A, мысалы, ctg $A = \frac{AC}{BC}$ (82-сурет).

Сонымен, әрбір сүйір бұрышқа қарастырылған төрт қатынастың бірін сәйкес қоюға болатыны анықталды. Сондықтан, бұл қатынастар тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының функциялары деген қорытынды жасауға болады. Бұл функциялар *сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары* деп аталады.

Бұрыштарды көп жағдайда грек әліппесінің кіші әріптерімен белгілейтіндіктен, олардың тригонометриялық функциялары былай жазылады: мысалы, sin α (оқылуы: синус альфа); cos β (косинус бета); tg γ (тангенс гамма); ctg δ (котангенс дельта).



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$;

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

82-сурет

«Тригонометрия» сөзі гректің «тригонон» («үшбұрыш») және «метрео» («өлшеймін») деген сөзінен шыққан.

1 - е с е п. ABC тікбұрышты үшбұрышының AC катеті 4,8 см, ал AB гипотенузасы 5,2 см. sin A-ны табу керек.

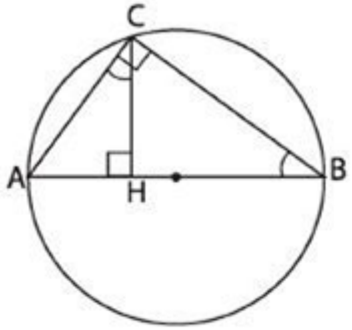
Шешуі. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ (82-сурет). Пифагор теоремасын пайдаланып, BC катетін табамыз:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5{,}2^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4} = 2 \text{ (см)}.$$

$$\sin A = \frac{2}{5{,}2} = \frac{5}{13}$$

Жауабы. $\frac{5}{13}$.

2-есеп. Егер шеңбердің кез келген C нүктесінен оның AB диаметріне CH перпендикулярын жүргізсе, онда $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$ болатынын дәлелдеу керек. (CH кесіндісі – AH және BH кесінділерінің орта пропорционалы.)



83-сурет

Дәлелдеуі. CA және CB кесінділерін жүргізейік, сонда ΔACB – тікбұрышты, өйткені AB қабырғасына жүргізілген медиана оның жартысына тең, $\angle ACB = 90°$ (83-сурет). Бұл үшбұрышта $\angle ACH + \angle HCB = 90°$, $\angle CBA + \angle HCB = 90°$, бұдан $\angle ACH = \angle CBA$ болатыны шығады; $\mathrm{tg}\angle ACH = \frac{AH}{CH}$, $\mathrm{tg}\angle CBA = \frac{CH}{BH}$. Тең сүйір бұрыштардың тангенстері тең болатындықтан, $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$ болады, дәлелдеу керегі де осы еді.

Сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларының жуық мәндерін есептеу үшін қосымшада кестелер берілген (166–167 беттер).

СҰРАҚТАР

1. Тікбұрышты үшбұрыштың синусы, тангенсі, котангенсі дегеніміз не?

2. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы α – сүйір бұрыш.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

161. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 12 см және 16 см. Үшбұрыштың: а) үлкен сүйір бұрышының синусын; ә) сүйір бұрыштарының синустарының қосындысын; б) бір сүйір бұрышының тангенсін; в) сүйір бұрыштарының тангенстерінің көбейтіндісін; г) әр сүйір бұрышының синусы мен косинусының квадраттарының қосындысын; ғ) әр сүйір бұрышының тангенсі мен котангенсінің көбейтіндісін табыңдар.

162. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 15 см, ал катеттерінің бірі 9 см. Үшбұрыштың: а) кіші сүйір бұрышының синусын; ә) сүйір бұрыштарының синустары квадраттарының қосындысын; б) сүйір бұрыштарының бірінің тангенсі мен котангенсінің қосындысын; в) әр сүйір бұрыштың синусы мен косинусының қосындысының квадратын табыңдар.

В деңгейі

163. а) 1) Катеті 3 см, оған қарсы жатқан бұрыштың тангенсі 0,75; 2) катеті 10 см, ал оған іргелес жатқан бұрыштың тангенсі 2,4 болса, тікбұрышты үшбұрыштың белгісіз катеті мен гипотенузасын табыңдар.

ә) Тікбұрышты ΔABD-да $\angle B = 90°$, биіктігі $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. CD-ны табыңдар.

б) Тіктөртбұрыштың ауданы 420 см^2, ал оның қабырғаларының айырымы 23 см. Тіктөртбұрыштың диагоналінің оның қабырғаларымен жасайтын бұрыштарының тангенсін табыңдар.

Жоғарғы Көлсай көлі

в) Қазақстанның «Көлсай көлдері» табиғи ұлттық саябағындағы Жоғарғы тау көлінің жағалауында X пункті бар. X пунктінен тау етегіндегі теңіз деңгейінде орналасқан A пунктіне дейінгі қашықтық 3 км-ге, ал XH теңіз деңгейіне дейінгі биіктік болса, және $\angle XAH = 65°$-ты құраса, XH биіктігін табыңдар. (Жауабын 0,1 км-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.)

164. а) Тікбұрышты үшбұрыштың: 1) сүйір бұрыштарының тангенстерінің көбейтіндісі 1-ге тең; 2) сүйір бұрыштарының синустары квадраттарының қосындысы 1-ге тең болатынын дәлелдеңдер.
ә) Кез келген α сүйір бұрышы үшін $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

165. а) Егер шеңбердің C нүктесінен AB диаметріне дейінгі қашықтық 6 см-ге, ал $\mathrm{tg}\angle ABC = \frac{2}{3}$ болса, AB диаметрін табыңдар.
ә) Радиусы 8 см-ге тең шеңбер мен онда жататын A мен B нүктелері берілген. Егер: 1) $\smile AB = 120°$; 2) $\smile AB = 50°$; 3) шеңбер A мен B нүктелерімен градустық өлшемдері 5 : 7 қатынасындай екі доғаға бөлінген болса, AB-ның ұзындығын табыңдар.
б) Шеңбердің AB хордасы диаметрдің 75 %-на тең. AB доғасының градустық өлшемін табыңдар.
в) Шеңбердің диаметрі мен онымен ортақ нүктесі жоқ хорданы қамтитын түзулердің арасындағы бұрыш 20°-қа тең. Егер хорданың диаметрдегі проекциясы 6 см-ге тең болса, хорданың ұзындығын табыңдар.

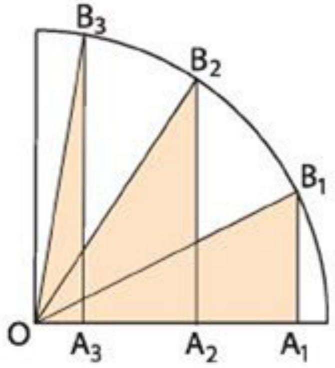
С деңгейі

166. Шеңбердің хордасы осы хорданың ұшынан жүргізілген диаметр мен хорданың диаметрдегі проекциясының орта пропорционалы болатынын дәлелдеңдер.

17. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларының қасиеттері

Теорема. **Үлкен сүйір бұрышқа оның: 1) синусының үлкен мәні; 2) косинусының кіші мәні; 3) тангенсінің үлкен мәні; 4) котангенсінің кіші мәні сәйкес келеді.**

84-суретті пайдаланып, өздігінен дәлелдеңдер. Бұл теоремадан сүйір бұрыштың тригонометриялық функциясының әрбір мәніне тек бір ғана сүйір бұрыш сәйкес келетіні шығады.

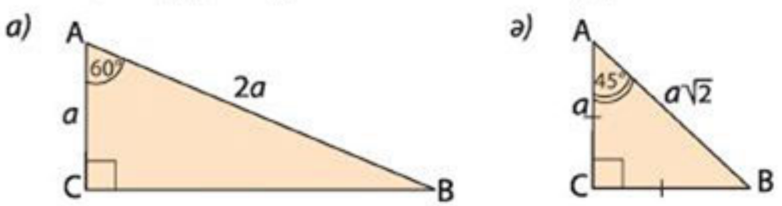


84-сурет

Тікбұрышты үшбұрыштың әрбір катеті гипотенузадан кіші болғандықтан, **кез келген сүйір бұрыштың синусы мен косинусы 1-ден кіші** болады. Ал катеттерінің бірі екіншісінен үлкен де, кіші де, екіншісіне тең де бола алатындықтан, тангенс пен котангенстің мәндері 1-ден үлкен, 1-ден кіші, 1-ге тең де бола алады.

Кейбір сүйір бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндерін есептейік. $\angle A = 60°$ болатын ABC тікбұрышты үшбұрышын қарастырайық (85, *а*-сурет), $\sin 60° = \frac{BC}{AB}$, $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$.

Тікбұрышты үшбұрышта 30°-тық бұрышқа қарсы жатқан катет гипотенузаның жартысына тең болатындықтан, $AC = a$ болса, $AB = 2a$ болады. Пифагор теоремасы бойынша, $BC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ болады, сонда $\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ болады. 30° және 60° болатын бұрыштардың косинусының, тангенсінің және котангенсінің мәндерін өздігінен есептеп табыңдар.



85-сурет

45° болатын бұрыштың тригонометриялық функцияларының мәндерін тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың қасиетін пайдаланып табуға болады (85, ә-сурет): $AB = a\sqrt{2}$. Сонда $\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тікбұрышты үшбұрыштың қасиеттерін пайдаланып (85, *а*, *ә*-суреттер), есептелген 30°, 45° және 60°-қа тең болатын α бұрышының $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндерінің кестесі төменде келтірілген.

Бұрыш	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{2}$ мен $\sqrt{3}$-тің ондық бөлшекпен жуық мәндерін тауып, мыналарды аламыз: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$, $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$. Сонда берілген кестедегі синус, косинус және тангенстің мәндері мына түрде жазылады.

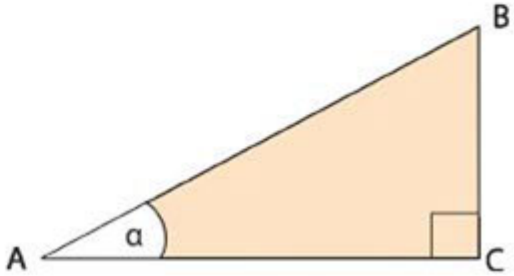
Бұрыш	Синус	Косинус	Тангенс
30°	0,500	0,866	0,577
45°	0,707	0,707	1,000
60°	0,866	0,500	1,732

Е с е п. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ тепе-теңдіктері орындалатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Тік бұрышы C болатын ABC тікбұрышты үшбұрышының $\angle A = \alpha$, сонда $\angle B = 90° - \alpha$ (86-сурет).

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \frac{BC}{AB} = \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{AC}{BC} = \mathrm{ctg}\,\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \frac{BC}{AC} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$



86-сурет

СҰРАҚТАР

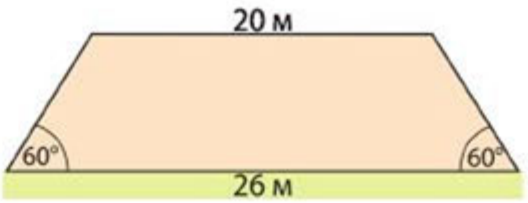
1. Кез келген сүйір бұрыштың синусы мен косинусы неліктен 1-ден кіші болатынын түсіндіріңдер.
2. Кіші сүйір бұрышқа оның: а) синусының кіші мәні; ә) косинусының үлкен мәні сәйкес келетінін дәлелдеңдер.
3. 30°, 45°, 60° бұрыштардың синусы, косинусы және тангенсінің мәндері неге тең? Осы мәндерді қалай табуға болатынын түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

167. а) 0,2; 2,1; 0,(3); $\frac{\sqrt{3}}{3}$ сандарының қайсысы: 1) сүйір бұрыштың синусының; 2) сүйір бұрыштың косинусының мәндері бола алады? ә) 2; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4 сандарының қайсысы сүйір бұрыштың тангенсінің мәндері бола алады?

168. Кез келген A сүйір бұрышы үшін: а) $\mathrm{tg}\,A \geq \sin A$; ә) $\mathrm{tg}\,A \geq \cos A$ теңдігі орындалатыны ақиқат па?



87-сурет

169. Жол жасау үшін жайылған үйіндінің жоғарғы жағының ені 20 м, ал төменгі жағының ені – 26 м. Үйіндінің көлбеулік бұрышы 60° болса, оның биіктігі қандай болғаны (87-сурет)?

170. Өрнектің мәндерін өсу ретімен жазыңдар:

а) $\sin 36°$, $\sin 80°$, $\sin 24°$;　　в) $\operatorname{tg} 65°$, $\operatorname{tg} 82°$, $\operatorname{tg} 28°$;

ә) $\cos 45°$, $\cos 76°$, $\cos 18°$;　　г) $\operatorname{ctg} 53°$, $\operatorname{ctg} 12°$, $\operatorname{ctg} 2°$;

б) $\cos 70°$, $\sin 50°$, $\cos 20°$;　　ғ) $\operatorname{tg} 60°$, $\operatorname{ctg} 80°$, $\operatorname{tg} 40°$.

171. а) 1) Бір сүйір бұрышының косинусы $\frac{1}{2}$-ге тең; 2) бір сүйір бұрышының синусы $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге тең болатын тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштарын табыңдар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының бірінің косинусы $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең болса, оның сүйір бұрыштарының тангенстері неге тең болады?

В деңгейі

172. а) Сүйірбұрышты үшбұрыштың бір бұрышының синусы $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ге, ал екіншісінің синусы $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ге тең. Үшбұрыштың үшінші бұрышын табыңдар.

ә) Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларының арасындағы бұрышы 20°. Осы үшбұрыштың табанындағы бұрышының синусы $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ден үлкен болады деген дұрыс па?

173. $ABCD$ шаршысы берілген, O – диагональдарының қиылысу нүктесі, M – CD қабырғасының ортасы. а) $\sin\angle CBM$; ә) $\cos\angle ABO$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle AMB\right)$; в) $\operatorname{ctg}\angle ABM$ табыңдар.

174. Теңсіздіктерді дәлелдеңдер:
а) $\sin 30° + \cos 45° > 1$; ә) $\operatorname{tg} 25° < \operatorname{ctg} 25°$.

175. Салыстырыңдар: а) $\sin 20°$ және $\sin 35°$; ә) $\cos 15°$ және $\cos 70°$; б) $\sin \alpha$ және $\sin^2\alpha$, мұндағы α – сүйір бұрыш; в) $\cos \alpha$ және $\cos^{-1}\alpha$, мұндағы α – сүйір бұрыш.

176. а) $\sin 60°$ немесе $\operatorname{tg} 30°$; ә) $\cos 45°$ немесе $\operatorname{tg} 45°$; б) $\sin^2 60°$ немесе $2\sin 60° - 1$; в) $\sin 40° \cdot \cos 20°$ немесе 0,25 мәндерінің қайсысы үлкен және неліктен?

177. Есептеңдер: а) $0{,}75 \cdot \cos 60° + 0{,}25 \cdot \sin 30°$; ә) $5\sin 30° - 3\operatorname{tg} 45°$.

178. $\sin^2 45°$-тың мәні: а) $\cos^2 30°$ және $\cos^2 60°$; ә) $\sin^2 30°$ және $\sin^2 60°$ өрнектері мәндерінің арифметикалық ортасына тең болады деген дұрыс па?

179. а) 1) Гипотенузасы 29 см, ал катеттерінің бірі – 20 см; 2) катеттері 5 см және 7 см болатын тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.
ә) Қабырғалары: 1) 2 см, 2 см және $\sqrt{8}$ см; 2) $\sqrt{2}$ дм, $\sqrt{3}$ дм және $\sqrt{5}$ дм болатын үшбұрыш бар бола ма? Егер бар болса, онда оның кіші бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

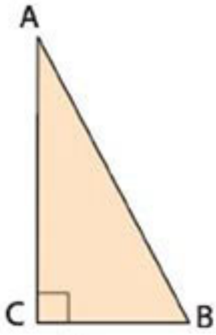
С деңгейі

180. а) Ұзындығы 5 см-ге тең хорда шеңбердің 40°-қа тең доғасын кереді. Шеңбердің центрінен осы хордаға дейінгі қашықтықты 0,1 см дәлдікпен есептеңдер.
ә) Радиусы 8 см болатын шеңберге жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Шеңбермен жанасу нүктелерінің арасындағы қашықтықты 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

181. а) Сырттай сызылған шеңбердің радиусы 3 см; ә) іштей сызылған шеңбердің радиусы 4 см болса, теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

182. Ұзындығы 8 см болатын хорда 72° доғаны кереді. Градустық өлшемі 144° доғаны керетін хорданың ұзындығын 0,1 см дәлдікпен табыңдар.

18. Тригонометриялық тепе-теңдіктер



88-сурет

Бұрыштардың тригонометриялық функцияларының арасында әртүрлі байланыстар бар, мысалы, $\mathbf{tg}\ A = \frac{\sin A}{\cos A}$ (бұрыштың тангенсі сол бұрыштың синусының косинусына қатынасына тең). Шынында да: $\sin A = \frac{CB}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$ (88-сурет), $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{CB \cdot AB}{AB \cdot AC} = \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} A$.

$\mathbf{tg}\ A \cdot \mathbf{ctg}\ A = 1$ теңдігін өздігінен дәлелдеңдер.

Т е о р е м а. **Кез келген A сүйір бұрышы үшін $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ теңдігі орындалады.**

Д ә л е л д е у і. $\sin A = \frac{CB}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$ (88-сурет), сонда $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, себебі, Пифагор теоремасы бойынша $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ теңдігі *негізгі тригонометриялық тепе-теңдік* деп аталады.

Е с е п. Кез келген α сүйір бұрышы үшін $\mathbf{1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ теңдігінің екі жағын да $\cos^2\alpha$-ға бөлеміз. Сонда: $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

СҰРАҚТАР

1. Қандай теңдікті негізгі тригонометриялық тепе-теңдік деп атайды? Сол тепе-теңдікті дәлелдеңдер.

2. Кез келген α сүйір бұрышы үшін $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

183. а) Косинусы $\frac{12}{13}$-ге тең болатын сүйір бұрыштың синусы мен тангенсін; ә) синусы 0,6-ға тең болатын сүйір бұрыштың косинусы мен тангенсін табыңдар.

184. а) Синусы 0,9-ға, ал косинусы 0,3-ке тең болатын; ә) синусы 0,8-ге, ал косинусы 0,6-ға тең болатын бұрыш бола ма?

B деңгейі

185. а) Кез келген α сүйір бұрышы үшін: 1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ теңдіктері орындала ма?

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың кез келген сүйір α және β бұрыштары үшін: 1) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$; 2) $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = 1$ теңдіктерінің ақиқат болатынын дәлелдеңдер.

186. Кез келген α сүйір бұрышы үшін $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

187. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 64 м, табанындағы бұрышының косинусы 0,28-ге тең. Үшбұрыштың биіктіктерін табыңдар.

ә) Табаны 6 см-ге, төбесіндегі бұрышы 80°-қа тең болатын теңбүйірлі үшбұрыш берілген. 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен: 1) үшбұрышқа іштей сызылған; 2) үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусын табыңдар.

C деңгейі

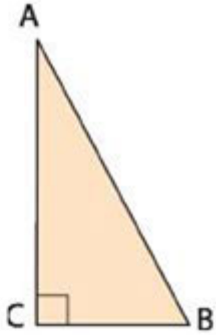
188. $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}3$ екені белгілі болса, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$-ны табыңдар, мұндағы α – сүйір бұрыш.

189. Гипотенузасы c және сүйір бұрыштарының синустарының қосындысы d болатын тікбұрышты үшбұрыштың катеттері ұзындықтарының көбейтіндісін табыңдар.

19. Тікбұрышты үшбұрыштарды шешу

Сүйір бұрыштың тригонометриялық функцияларының анықтамаларынан мынаны аламыз (89-сурет): *тікбұрышты үшбұрыштың катеті оның:*

– гипотенузасы мен осы катетке қарсы жатқан бұрыштың синусының көбейтіндісіне тең;



89-сурет

– гипотенузасы мен осы катетке іргелес жатқан бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең;

– екінші катеті мен бірінші катетке қарсы жатқан бұрыштың тангенсінің көбейтіндісіне тең;

– екінші катеті мен бірінші катетке іргелес жатқан бұрыштың котангенсінің көбейтіндісіне тең.

ABC үшбұрышында (89-сурет)

$CB = AB \cdot \sin A$ немесе $CB = AC \cdot \operatorname{tg} A$

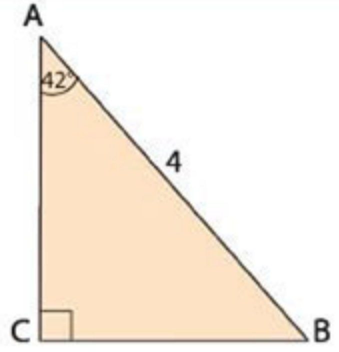
$AC = AB \cdot \cos A$ немесе $AC = CB \cdot \operatorname{ctg} A$

Тікбұрышты үшбұрыштың бұрыштары мен олардың тригонометриялық функцияларының арасындағы тәуелділікті пайдаланып, тікбұрышты үшбұрыштың белгісіз элементтерін табуға арналған есептерді шығаруға болады (оның кейбір белгілі элементтері бойынша). Мұндай есептерді *тікбұрышты үшбұрыштарды шешуге арналған есептер* деп атайды.

1 - е с е п. ABC тікбұрышты үшбұрышының AB гипотенузасы 4 дм және $\angle A = 42°$. Оның белгісіз сүйір бұрышы мен катеттерін 0,1 дм дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. $\angle B = 90° - \angle A = 48°$. Катеттерін былай табуға болады: $BC = AB \cdot \sin 42°$, $AC = AB \cdot \cos 42°$ (90-сурет). Тригонометриялық функциялардың жуық мәндер кестесінен (үтірден кейінгі екі ондық таңбаларымен) $\sin 42° \approx 0{,}67$, ал $\cos 42° \approx 0{,}74$ болатынын табамыз. Сонда $BC \approx 4 \cdot 0{,}67 \approx 2{,}7$ (дм), $AC \approx 4 \cdot 0{,}74 \approx 3$ (дм) болады.

Ж а у а б ы. 48°, ≈ 2,7 дм, ≈ 3 дм.

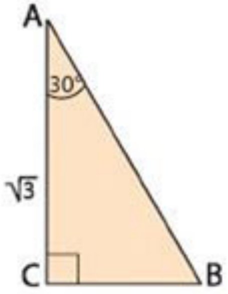


90-сурет

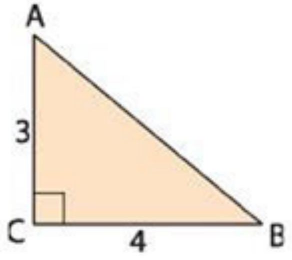
2 - е с е п. ABC тікбұрышты үшбұрышының AC катеті $\sqrt{3}$ см және $\angle A = 30°$ (91-сурет). Оның B бұрышын, BC катетін және AB гипотенузасын табу керек.

Ш е ш у і. $\angle B = 90° - \angle A = 60°$. $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$ (см), $AB = 2 \cdot BC = 2$ (см).

Ж а у а б ы. 60°, 1 см, 2 см.



91-сурет



92-сурет

3 - е с е п. ABC тікбұрышты үшбұрышының AC катеті 3 см, BC катеті 4 см. Оның гипотенузасы мен белгісіз сүйір бұрыштарын 1° дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. $\operatorname{tg} B = 3 : 4 = 0{,}75$ (92-сурет). Сүйір бұрыштардың тангенстерінің жуық мәндерінің кестесін пайдаланып, $\angle B \approx 37°$ болатынын табамыз, сонда $\angle A \approx 53°$. Пифагор теоремасы бойынша, $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

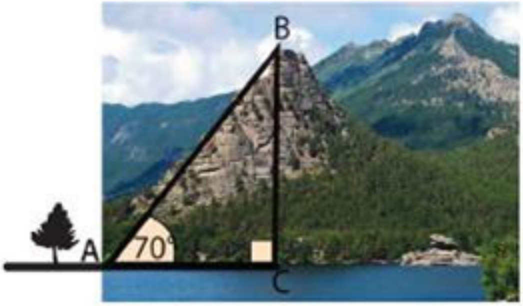
Ж а у а б ы. $\approx 37°$, $\approx 53°$, 5 см.

4 - е с е п. Оқжетпес жартасының (Ақмола облысы, Бурабай) биіктігін қалай табуға болады (93-сурет)?

Ш е ш у і. Оқжетпес жартасының биіктігі ABC тікбұрышты үшбұрышының BC қабырғасының ұзындығы болады. Оны табу үшін AC кесіндісінің ұзындығы мен BAC бұрышын өлшеу керек. Сонда $BC = AC \cdot \operatorname{tg}\angle BAC$.

Егер $AC = 100$ м, $\angle BAC = 70°$ болса, онда $BC = 100 \cdot 2{,}75 \approx 275$ (м).

Ж а у а б ы. Оқжетпес жартасының биіктігі ≈ 275 м.



93-сурет

СҰРАҚТАР

1. Тікбұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузасы мен сүйір бұрышы арқылы, сүйір бұрышы мен екінші катеті арқылы қалай өрнектеледі?

2. Қандай есептерді тікбұрышты үшбұрыштарды шешуге арналған есептер деп атайды? Мысал келтіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

190. а) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 7 см және бір сүйір бұрышының косинусы 0,4-ке тең екені белгілі. Осы үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың катеті $\frac{5}{7}$ дм және оған қарсы жатқан бұрышының синусы 0,6-ға тең екені белгілі. Осы үшбұрыштың гипотенузасы мен белгісіз катетін табыңдар.

б) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы $\sqrt{89}$ см және бір сүйір бұрышының тангенсі 1,6-ға тең болса, осы үшбұрыштың катеттерін табыңдар.

в) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы c және бір сүйір бұрышы 30° екені белгілі. Осы үшбұрыштың катеттерін және үлкен бұрышының косинусын табыңдар.

191. а) Тікбұрышты ABC үшбұрышының гипотенузасы $AB = 82$ см және $\angle A = 36°$. Осы үшбұрыштың катеттерін 0,1 см дәлдікпен табыңдар.

ә) Тікбұрышты ABC үшбұрышының BC катеті 25 см және $\angle A = 32°$. Осы үшбұрыштың гипотенузасы мен екінші катетін 0,1 см дәлдікпен табыңдар.

В деңгейі

192. Диагональдары $2\sqrt{3}$ дм және 2 дм болатын ромбтың бұрыштарын табыңдар.

193. а) Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 21 см және 18 см. Оның гипотенузасы мен сүйір бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Тікбұрышты үшбұрыштың катеті 52 см және гипотенузасы 67 см. Осы үшбұрыштың екінші катетін және 1°-қа дейінгі дәлдікпен сүйір бұрыштарын табыңдар.

194. а) Тікбұрышты трапецияның сүйір бұрышы 60°. Ұзын бүйір қабырғасы мен үлкен табанының ұзындықтары 12 см. Трапецияның периметрін табыңдар.

ә) Тікбұрышты ACB үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AC = 14$ см, BM – медиана, $\angle AMB = 130°$. BM мен BC кесінділерінің ұзындықтарын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

195. Радиусы 12 см болатын шеңберге екі жанама жүргізілген. Олардың арасындағы бұрыш 40°. Жанамалардың қиылысу нүктесі мен шеңбер центрінің арақашықтығын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

196. Жартышеңбер градустық өлшемдерінің қатынасы $2:4$ болатындай екі доғаға бөлінген. Бөлу нүктесі диаметрдің ұштарымен хорда арқылы қосылған. Осы хордалардың айырымы 10 см болса, диаметрдің ұзындығы қандай болады?

197. а) Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан биіктік және медиана жүргізілген. Олардың ұзындықтары, сәйкесінше, 12 см және 15 см. Осы үшбұрыштың қабырғалары мен сүйір бұрыштарының синустарын табыңдар.

ә) Тікбұрышты ACB үшбұрышында $\angle C = 90°$, катет $AC = 4$ дм, $\angle BAC = 70°$, $D \in BC$, және де $\angle DAC = 50°$. BD қашықтығын 1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

б) ә) есебінің шартындағы D – дөңнің төбесі, DB шамшырақ деп елестетіңдер. Егер AC қашықтығын және CAD мен CAB бұрыштарын өлшеуге болса, шамшырақтың биіктігін қалай табуға болады? Егер $AC = 100$ м, $\angle CAD = 40°$, $\angle CAB = 80°$ болса, DB-ны 1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

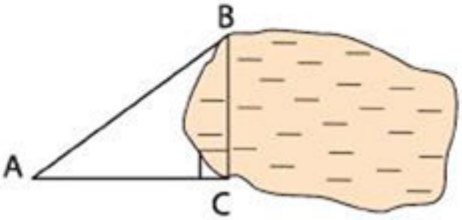
С деңгейі

198. Тіктөртбұрыштың қабырғалары 35 см және 74,9 см-ге тең. Оның диагональдарының арасындағы сүйір бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

199. Табандары 12 см және 54 см, ал бүйір қабырғалары 26 см және 40 см болатын трапецияның бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

20. «Тікбұрышты үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатыстар» тақырыбына есептер

1 - е с е п. Бұрыштардың тригонометриялық функцияларын пайдаланып, көлдің қарама-қарсы жағындағы екі нүктенің арақашықтығын (94-сурет) қалай есептеуге болады?



94-сурет

Ш е ш у і. AB арақашықтығы мен A бұрышын өлшеп, $BC = AB \cdot \sin A$ табамыз. Немесе AC арақашықтығы мен A бұрышын өлшеп, $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A$ табуға болады. Мысалы, $AB = 305$ м, $\angle A = 32°$ болса, онда $BC = 305 \cdot \sin 32° \approx 305 \cdot 0{,}53 \approx 162$ (м).

2 - е с е п. C пунктінен $h \approx 400$ м биіктікте болған ұшақ осы пункттен 2,5 км қашықтықтағы аэродромға қонуға бағытталды. Ұшақтың B қону бұрышын табу керек (95-сурет).

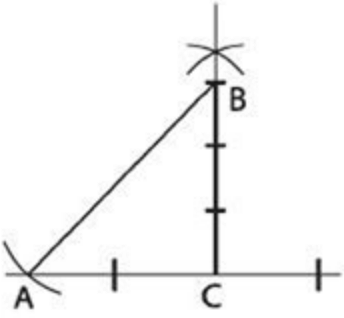
Ш е ш у і. ABC тікбұрышты үшбұрышынан $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} \approx \frac{400}{2500} = 0{,}16$ табамыз. Тригонометриялық функциялардың жуық мәндерінің кестесін пайдаланып, $\angle B \approx 9°$ екенін табамыз.

95-сурет

Ж а у а б ы. 9°.

3 - е с е п. Синусы 0,75-ке тең болатын үшбұрыш салу керек.

Ш е ш у і. Ізделініп отырған бұрышқа қарсы жатқан катеттің гипотенузаға қатынасы $\frac{3}{4}$ болатындай тікбұрышты үшбұрыш саламыз (96-сурет). Сонда A ізделінді бұрыш болады.



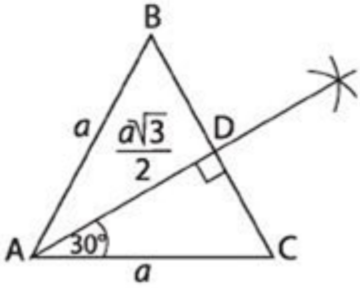
96-сурет

4 - е с е п. a кесіндісі берілген. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ кесіндісін салу керек.

Ш е ш у і. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болғандықтан, $x = a \cdot \cos 30°$. Сонда, x тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы a-ға тең болатын 30°-тық бұрышына іргелес жатқан катеті болады.

С а л у ы. 1) Қабырғасы a-ға тең болатын теңқабырғалы ABC үшбұрышын саламыз (97-сурет).

2) A нүктесінен BC қабырғасына AD перпендикулярын түсіріп, $AD = x$ аламыз.



97-сурет

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

200. Тікбұрышты OMN үшбұрышында $\angle O = 90°$, NK – сүйір бұрышының биссектрисасы. Егер $ON = 4$ см, $MN = 5$ см болса, биссектрисаның MO катетіне түскен проекциясын табыңдар.

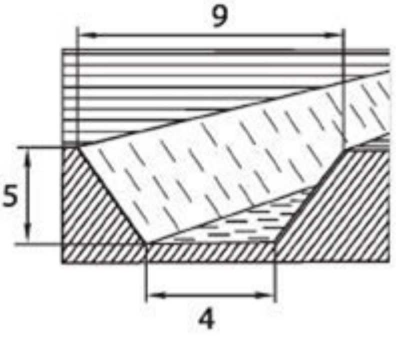
201. PNK үшбұрышының периметрі 8,4 дм, ал оның PM биссектрисасы NK қабырғасын $NM = 2{,}7$ дм, $MK = 0{,}9$ дм бөліктерге бөледі. PN және PK қабырғаларының ұзындықтарын табыңдар.

202. ABC үшбұрышына іштей $AMNK$ ромбы сызылған, оның A төбесі ортақ, ал M, N және K нүктелері, сәйкесінше, үшбұрыштың AB, BC және AC қабырғаларында жатыр. Егер $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см болса, BN және NC-ның ұзындықтарын табыңдар.

203. а) Синусы 0,4-ке; ә) косинусы $\frac{5}{8}$-ке; б) тангенсі 1,5-ке; в) котангенсі 0,75-ке тең болатын сүйір бұрыш салыңдар.

В деңгейі

204. а) Қазылған арықтың формасы табандары 4 м және 9 м, биіктігі 5 м болатын теңбүйірлі трапеция тәріздес (98-сурет). Оның бүйір қабырғалары арықтың табанын қандай бұрышпен қияды? Жауаптарыңды 1°-қа дейінгі дәлдікпен көрсетіңдер.



98-сурет

ә) Теміржолдың төсеме үйіндісінің жоғарғы бөлігінің ені 6 м, ал төменгі бөлігінің ені 12 м. Оның екі жағының да көлбеулік бұрышы 35° болса, үйіндінің биіктігін 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

205. Қабырғаға сүйеулі тұрған тақтай еденмен 65° бұрыш жасайды. Тақтайдың төменгі ұшына тимей, оның астымен еденге өлшемі 2 м × 3 м болатын тіктөртбұрышты қаңылтыр төсеуге бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

206. а) Екі түзу жол 43° бұрыш жасап қиылысады. Олардың бірінде қиылысқан жерден бастап 6,5 км қашықтықта пункт орналасқан және осы пункттен екінші жолға дейін ең қысқа жол салынған. Осы жолдың ұзындығын 0,001 км дәлдікпен табыңдар.

ә) Батыр мен Мақсат дөңнің қарама-қарсы екі бетінде орналасқан A және B пункттерінен C төбесіне AC және BC беткейлерімен көтерілді. $\angle CAB = 25°$, $AC = 2$ км, $BC = 3$ км екені белгілі. BC беткейімен көтерілу бұрышын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

207. Радиустарының қатынастары 1:2:3 қатынасындай болатын үш шеңбер сырттай жанасады. Жанасу нүктелерінің арасында пайда болған доғалардың градустық өлшемдерін табыңдар.

208. а) Өрнекті ықшамдаңдар:

1) $\sin(90° - \alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(90° - \alpha) \cdot \sin\alpha$;

2) $\mathrm{tg}(90° - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}(90° - \alpha) \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$, мұндағы α – сүйір бұрыш.

ә) Өрнектің таңбасын анықтаңдар:

1) $(\cos 60° - \cos 30°) \cdot (\mathrm{tg}\,60° - \sin 60°)$;

2) $(\mathrm{tg}\,30° - \sin 60°) \cdot (\sin 45° - \mathrm{tg}\,45°)$.

С деңгейі

209. а) BAC бұрышының AB қабырғасына $AM = 8$ см кесінді салынған, оның AC түзуіндегі проекциясы 5 см-ге тең. Бұрыштың басқа қабырғасына $AN = 12$ см болатын кесінді салынған. AN кесіндісінің AB түзуіндегі проекциясын табыңдар.

ә) Егер тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің гипотенузаға түскен проекциялары 6 см және 4 см болса, оның сүйір бұрыштарын 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

210. Өрнектің мәнін табыңдар: $\mathrm{tg}\,15° \cdot \mathrm{tg}\,30° \cdot \mathrm{tg}\,45° \cdot \mathrm{tg}\,60° \cdot \mathrm{tg}\,75°$.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

211. 1А) Өрнектің мәнін табыңдар: $\sin 30° \cdot \cos 60° \cdot \mathrm{tg}\,45° \cdot \mathrm{ctg}\,30°$.

2А) Егер $\sin\alpha = 0{,}8$ болса, онда $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ табыңдар, мұндағы α – сүйір бұрыш.

3В) Синусы 0,8-ге тең болатын сүйір бұрыш салыңдар.

4В) Ромбтың қабырғасы m-ге, ал оның доғал бұрышы 120°-қа тең. Ромбтың диагональдарын табыңдар.

5С) ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 12$ см. Осы үшбұрыштың CH биіктігін табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Геометриялық есептерді шешу амалдарының жинақталуы математикадағы жаңа бөлімдерге негіз болды. XVI ғасырдың соңында тригонометрия, яғни үшбұрыш қасиеттерінің негізіндегі қосымша өлшеулер, XVII ғасырда координата әдісі пайда болды. Екі бағыт та геометриядан бастау алады. Олар алгебраға да, геометрияға да қатысты қолданылады. Геометрияға қатысты негізгі ұғымдар қолданылғанымен, осы кезден бастап жаңа қарқын алды.

99-сурет

Пифагордың атақты теоремасы мен оған кері теорема кеңінен қолданылған. Мысалы, Ежелгі Мысырда жерге тік бұрыш салу үшін жіпті түйіндермен 12 тең бөлікке бөліп, жерге салып қатты тартып тұрып, қабырғалары 3, 4 және 5 бөліктен тұратын үшбұрыш құрған (99-сурет). Сонда Пифагор теоремасына кері теорема бойынша, 5 бөліктен тұратын қабырғаға қарсы бұрыш тік болады. Қабырғалары 3, 4 және 5 бірліктен тұратын үшбұрышты *мысырлық* үшбұрыш деп атайды.

Тарихи деректер бойынша, тригонометрияға қатысты алғашқы тұжырымдар біздің заманымызға дейінгі XV ғасырда өмір сүрген ежелгі қытайлық ғалымдардың еңбектерінде де айтылған. Біздің заманымыздың II ғасырында грек ғалымы Птолемей астрономияға арналған еңбегінде тригонометрия негіздерін баяндаған, синустар кестесін және геометрия амалдарын тригонометриялық әдіспен шешудің кейбір тәсілдерін берген. V–X ғасырлардағы үнді ғалымдары тригонометрия ғылымының қалыптасып дамуына зор үлес қосты. Атап айтар болсақ, олар тригонометриялық кестелерді нақтылаған. Әбу Райхан әл-Беруни (973–1050) мен Насыр ад-Дин ат-Туси (1201–1274) сынды Орта Азия ғалымдары тригонометрияны геометрияның жеке бөлімі ретінде арнайы қарастырды.

Ғаламторды пайдаланып, осы ғалымдар, олардың тригонометрияның дамуына қосқан үлестері туралы дерек жинаңдар.

XV ғасырда неміс математигі Р. Мюллер (1436–1476) «Үшбұрыштың барлық түрі туралы бес кітап» атты еңбегінде араб дереккөздерін негізге ала отырып, Еуропада тригонометрия ғылымының қалыптасуына ықпал етті.

Пифагор

Насыр ад-Дин ат-Туси

III. ФИГУРАЛАРДЫҢ АУДАНДАРЫ

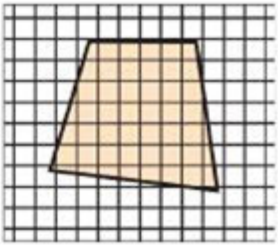
Тарауды оқу барысында

• фигураның ауданы ұғымын және ауданның негізгі қасиеттерін (аксиомаларын);
• ауданның өлшем бірліктерін;
• тең құрамдас және тең шамалас фигуралардың анықтамаларын;
• шаршының, тіктөртбұрыштың, тікбұрышты үшбұрыштың, параллелограмның, үшбұрыштың, ромбтың, трапецияның, төртбұрыштың аудандарын табу формулаларын **білу керек.**

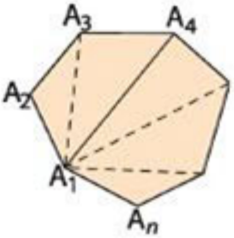
• тең шамалас және тең құрамдас фигураларды таба алу;
• тіктөртбұрыштың, параллелограмның, үшбұрыштың, трапецияның аудандарының формулаларын қорытып шығара алу;
• шаршының, тіктөртбұрыштың, тікбұрышты үшбұрыштың, параллелограмның, үшбұрыштың, ромбтың, трапецияның, төртбұрыштың аудандарын есептей алу;
• көпбұрыштың аудандары формулаларын есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

21. Аудан түсінігі. Тіктөртбұрыштың ауданы

Фигуралардың аудандарымен сендер алдыңғы сыныптардан таныс болдыңдар және оларды есептедіңдер. Мысалы, 100-суреттегі төртбұрыштың ауданы $S \approx 43$ квадрат бірлікке тең. Бұл көпбұрыштың ауданы оның ішіне қанша бірлік өлшем мен оның бөліктерін орналастыруға болатынын көрсететін оң санмен өрнектеледі (өлшем бірлігі ретінде бір тор көз алынған). Сондай-ақ шаршының, тіктөртбұрыштың және дөңгелектің ауданын есептеу формулаларын да қолдандыңдар. Аудан ұғымын күнделікті өмірде жиі қолданамыз, мысалы, көп еститін сөздер: «пәтердің ауданы 76 квадрат метр», «бақ телімінің ауданы 10 сотық». Бұл сөз шамаларды өлшегенде жиі қолданылады. Мысалы, өлшеу арқылы Қазақстанның ауданы 2724,9 мың кв. км екені белгілі болды (әлемде 9-орын). Аудан ұғымын және оның қасиеттерін тереңірек зерттейік. Алдымен, қарапайым фигуралардың аудандарын қарастырамыз.



100-сурет



101-сурет

Саны шектеулі үшбұрыштарға бөлуге болатын фигура *қарапайым фигура* деп аталады. Қарапайым фигураға мысал ретінде дөңес көпбұрышты алуға болады (101-сурет). Оны төбесінен жүргізілген диагональдар арқылы үшбұрыштарға бөлуге болады.

Келесі тұжырымдар *ауданның негізгі қасиеттері* (аксиомалары) болып табылады:

1) әрбір қарапайым фигураға оның *ауданы* деп аталатын тек бір ғана оң өлшем сәйкес болады;

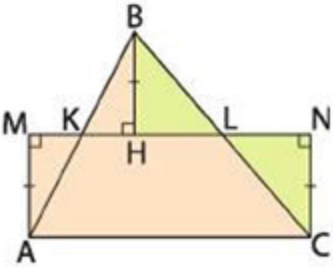
2) бірдей фигуралардың аудандары тең болады;

3) егер фигура ішкі облыстарының ортақ нүктелері болмайтын бірнеше фигуралардан құралған болса, оның ауданы осы фигуралардың аудандарының қосындысына тең;

4) қабырғасы a-ға тең шаршының ауданы a^2-қа тең.

Ауданның негізгі өлшем бірліктері квадрат миллиметр (мм^2), квадрат сантиметр (см^2), квадрат дециметр (дм^2), квадрат метр (м^2), квадрат километр (км^2) болады. Мысалы, шаршының қабырғасы $a = 1$ м болса, ауданы $S = 1$ м^2, $a = 10$ м болса, $S = 100$ м^2 $= 1$ ар, $a = 100$ м болса, $S = 10\,000$ м^2 $= 1$ га болады.

Аудандары тең фигуралар *тең шамалас* фигуралар деп аталады. Екі фигураның бірін бөліктерге бөліп, ол бөліктерден екінші фигураны құрауға болса, онда олар *тең құрамдас* фигуралар деп аталады. Тең құрамдас фигуралар тең шамалас болады. Мысалы, 102-суреттегі ABC үшбұрышы және $AMNC$ тіктөртбұрышы тең құрамдас, себебі олар тең үшбұрыштардан ($\Delta AMK = \Delta BHK$, $\Delta CNL = \Delta BHL$) және $AKLC$ трапециясынан құралған. Демек, олардың аудандары тең, яғни ABC үшбұрышы және $AMNC$ тіктөртбұрышы тең шамалас.

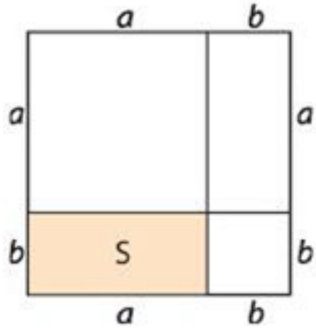


102-сурет

Т е о р е м а. **Тіктөртбұрыштың ауданы оның іргелес екі қабырғасының көбейтіндісіне тең.**

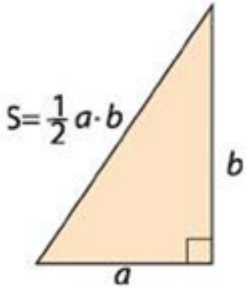
Д ә л е л д е у і. Тіктөртбұрыштың іргелес екі қабырғасын a және b, ал ауданын S деп белгілейік. $\boldsymbol{S = ab}$ болатынын дәлелдейік.

Берілген тіктөртбұрышты қабырғалары $a + b$ болатын шаршыға дейін толықтырайық (103-сурет). Бұл шаршының ауданы $(a + b)^2$. Бұл шаршы қабырғалары a және b болатын екі шаршыдан және екі тең тіктөртбұрыштан құралған. Әрбір тіктөртбұрыштың ауданы – S.



103-сурет

Ауданның қасиеті бойынша, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + S + S$, бұдан $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S$, $2ab = 2S$, $S = ab$ шығады, дәлелдеу керегі де осы еді.



104-сурет

Бұл теоремадан шығатыны, **тікбұрышты үшбұрыштың ауданы оның катеттерінің көбейтіндісінің жартысына тең** (тіктөртбұрыштың диагоналі оны екі тең тікбұрышты үшбұрышқа бөлетіндіктен) (104-сурет).

Е с е п. Ұзындығы 20 м болатын тіктөртбұрыш пішінді жер телімі мен шаршы пішінді жер телімінің қоршауларының ұзындықтары тең және 100 м-ден. Қай жер телімінің ауданы үлкен?

Ш е ш у і. Жер телімі қоршауының ұзындығы оның периметрі болады. Есептің шарты бойынша тіктөртбұрыш пен шаршы тәрізді жер телімдерінің периметрлері бірдей 100 м-ден. Тіктөртбұрыштың белгісіз қабырғасы – b м, ал шаршының қабырғасы a м болсын, сонда: $2(b + 20) = 100$ және $4a = 100$, бұдан шығатыны $b = 30$, $a = 25$. Демек, жер телімдерінің аудандары: $20 \cdot 30 = 600$ (м^2) және $25^2 = 625$ (м^2). Яғни, шаршы пішінді жер телімінің ауданы үлкен.

Ж а у а б ы. Шаршы пішінді жер телімінің ауданы үлкен.

СҰРАҚТАР

1. Фигураның ауданы дегеніміз не және ауданның қандай негізгі қасиеттерін білесіңдер?

2. Қандай фигуралар: а) тең шамалас; ә) тең құрамдас фигуралар деп аталады?

3. Тіктөртбұрыштың ауданын тұжырымдаңдар және ауданы туралы теореманы дәлелдеңдер.

4. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданын оның катеттері бойынша қалай есептеуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

212. а) Тең төртбұрыштар тең шамалас болатынын дәлелдеңдер. Кері тұжырым жасап, оның дұрыстығын тексеріңдер.

ә) Тең құрамдас көпбұрыштар – тең шамалас деген ақиқат па?

б) Қағаздан катеттері 3 см және 4 см болатын екі тең тікбұрышты үшбұрыш қиып алыңдар. Олардан: 1) тіктөртбұрыш; 2) параллелограмм; 3) теңбүйірлі үшбұрыш құрастырыңдар. Сол фигуралардың аудандарын табыңдар.

в) Дәптерге шаршы сызып, оның ауданын бірлік өлшем ретінде алыңдар. 1) Аудандары 4 кв. бірлікке тең болатын шаршы мен тікбұрышты үшбұрыш; 2) аудандары 3 кв. бірлікке тең болатын тіктөртбұрыш пен теңбүйірлі үшбұрыш салыңдар.

213. а) Теңқабырғалы үшбұрышты үш бөлікке бөліп, олардан тіктөртбұрыш құраңдар.

ә) Қағаздан параллелограмм қиып алып, оны үшбұрыш құрастыруға болатындай екі бөлікке бөліңдер.

214. а) Шаршы пішіндес екі жер телімінің қабырғаларының ұзындықтары 10 м және 24 м. Ауданы осы шаршылардың аудандарының қосындысына тең болатын шаршы қабырғасының ұзындығын табыңдар.

ә) Тіктөртбұрыштың қабырғалары 4 см және 15 см. Осы тіктөртбұрышқа тең шамалас және қабырғаларының қатынасы 3 : 5 қатынасындай болатын тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

б) Катеттері 24 см және 27 см болатын тікбұрышты үшбұрышқа тең шамалас шаршының қабырғасын табыңдар.

215. а) Өлшемдері $3 \text{ м} \times 1{,}8 \text{ м}$ болатын тіктөртбұрыш пішіндес бөлменің еденін қабырғасы 30 см болатын шаршы тақтайшалармен жабу керек. Неше тақтайша керек болады?

ә) Ұзындығы 3,2 м, биіктігі 2,5 м тіктөртбұрышты қабырғаға жапсыру үшін өлшемдері $20 \text{ см} \times 10 \text{ см}$ тіктөртбұрышты тақтайшаның нешеуі керек?

В деңгейі

216. Қабырғалары $AB = 4$ дм, $AD = 8$ дм болатын $ABCD$ тіктөртбұрышының ұзын қабырғасына іргелес екі бұрышының биссектрисалары жүргізілген. Осы биссектрисалармен тіктөртбұрыштың ауданы қандай бөліктерге бөлінетінін табыңдар.

217. а) ABC тікбұрышты үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 1$ м, $\angle A = 30°$. Осы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

ә) Гипотенузасы 10 см болатын тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

б) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасының катеттердің біріне қатынасы $\frac{5}{3}$-ке, ал екінші катет 8 см-ге тең. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

в) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 25 см-ге, ал ауданы 84 см^2-ге тең. Үшбұрыштың периметрін табыңдар.

218. Тіктөртбұрыштың қабырғасы a, ал осы қабырға мен диагоналінің арасындағы бұрыш β. Егер: а) $a = 6$ см, $\beta = 30°$; ә) $a = 5$ см, $\beta = 44°$ болса, тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар (жауаптарыңды 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен көрсетіңдер).

219. а) Қырының ұзындығы 10 см болатын 16 кубтың сыртын қаптау үшін 20 см × 30 см өлшемді түрлі түсті қағаздың неше беті керек?

ә) Ені, ұзындығы, биіктігі, сәйкесінше, 5 см, 8 см, 10 см болатын тікбұрышты параллелепипедтің барлық жақтарының аудандары қосындысын табыңдар.

Балқаш көлі

220. а) Жер телімі тіктөртбұрыш тәріздес. Ол масштабы 1 : 1 000 болатын картада белгіленген. Жер телімінің нақты ауданы картадағыға қарағанда қанша есе үлкен?

ә) Жер телімі картада катеттері 3 см және 4 см болатын тікбұрышты үшбұрыш пішінде кескінделген. Масштаб 1 : 100 000 болса, жер телімінің жер бетіндегі ауданы қандай болады?

б) Жер бетіндегі ең үлкен көлдердің бірі – Балқаш көлі, оның ауданы Қазақстандағы барлық көлдің 45 000 км^2-ге тең жалпы ауданының 40 %-ын құрайды. Балқаш көлінің ауданын табыңдар.

221. а) Қазақстанда ауданы бойынша ең үлкен облыс – Қарағанды облысы (428 мың кв. км), ал ең кішісі – Солтүстік Қазақстан облысы (98 мың кв. км). Қарағанды облысының ауданы Солтүстік Қазақстан облысының ауданынан неше пайызға артық? Жауабын 1 %-ға дейінгі дәлдікпен беріңдер.

ә) Катеттері $AC = 4\frac{2}{3}$ дм, $BC = 3,5$ дм болатын тікбұрышты ABC үшбұрышының AC катетін 20 %-ға үлкейтіп, ал BC катетін 20 %-ға кішірейтсе, оның ауданы қалай өзгереді?

C деңгейі

222. а) ABC үшбұрышында $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\sin A + \sin B = 1,4$. ABC үшбұрышының ауданын табыңдар.

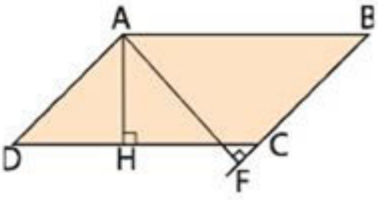
ә) Ауданы 36 см^2-ге тең $ABCD$ тіктөртбұрышы берілген. M, N, P, K нүктелері, сәйкесінше, оның AB, BC, CD, DA қабырғаларының орталары. $AMNCPK$ алтыбұрышының ауданын табыңдар.

б) 60°-қа тең A сүйір бұрышының ішіне C нүктесі белгіленген және одан бұрыштың қабырғаларына дейінгі CB және CD қашықтықтары, сәйкесінше, 1 дм және 2 дм-ге тең. $ABCD$ төртбұрышының ауданын табыңдар.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

$ABCD$ параллелограмын салып, AD және CD қабырғаларына, сәйкесінше, BH және BK биіктіктерін жүргізіңдер. BH, BK, AD және CD кесінділерін өлшеңдер. $AD \cdot BH$ және $CD \cdot BK$ көбейтіндісін салыстырыңдар.

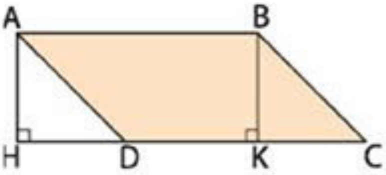
22. Параллелограмм мен үшбұрыштың аудандары



105-сурет

Параллелограмның биіктігі деп оның қабырғасының кез келген нүктесінен оған параллель қабырғасы жататын түзуге түсірілген перпендикулярларды айтатынын еске салайық. Параллелограмның параллель қабырғаларының арақашықтығы да оның биіктігі болады. 105-суреттегі AH және AF кесінділері – $ABCD$ параллелограмының биіктіктері.

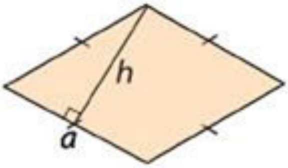
Теорема. **Параллелограмның ауданы оның қабырғасы мен сол қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісіне тең.**



106-сурет

Дәлелдеуі. $ABCD$ параллелограмы берілген болсын (106-сурет). Оның ауданы $\boldsymbol{S = DC \cdot AH}$ болатынын дәлелдейік.

Егер ол тіктөртбұрыш болмаса, онда оның бұрыштарының бірі, A немесе B – сүйір. A бұрышы сүйір болсын. CD түзуіне AH және BK перпендикулярларын жүргізейік. $ABCH$ трапециясының ауданы $ABCD$ параллелограмы мен ADH үшбұрышының аудандарының қосындысына немесе $HABK$ тіктөртбұрышы мен BCK үшбұрышының аудандарының қосындысына тең. Тікбұрышты ADH және BCK үшбұрыштары тең (гипотенузасы мен катеті бойынша), сондықтан олардың аудандары да тең. Сонымен, $ABCD$ параллелограмы мен $HABK$ тіктөртбұрышының аудандары да тең болады, яғни $S = AB \cdot AH$ немесе $S = DC \cdot AH$ болады.



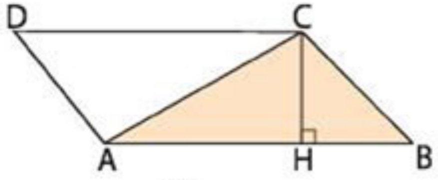
107-сурет

Ромбтың ауданын параллелограмм ауданының формуласымен есептеуге болады: $\boldsymbol{S = ah}$ (107-сурет), мұндағы a – қабырғасының ұзындығы, h – ромбтың биіктігі.

Үшбұрыштың биіктігі деп оның төбесінен қарсы жатқан қабырғасын қамтитын түзуге түсірілген перпендикулярды ғана емес, сол перпендикулярдың ұзындығын да айтатынын ескертейік.

Т е о р е м а. **Үшбұрыштың ауданы оның қабырғасы мен сол қабырғаға жүргізілген биіктігінің көбейтіндісінің жартысына тең.**

Д ә л е л д е у і. *ABC* үшбұрышы берілген болсын (108-сурет). Оның ауданы $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH}$ болатынын дәлелдейік. Бұл үшбұрышты *ABCD* параллелограмына дейін толықтырайық. Параллелограмның ауданы *ABC* мен *CDA* үшбұрыштарының аудандарының қосындысына тең болады. Үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша бұл үшбұрыштар тең болғандықтан, параллелограмның ауданы *ABC* үшбұрышының екі еселенген ауданына тең болады. *ABCD* параллелограмының *AB* қабырғасына жүргізілген *CH* биіктігі *ABC* үшбұрышының *AB* қабырғасына жүргізілген биіктігіне тең. Демек, *ABC* үшбұрышының ауданы *ABCD* параллелограмының ауданының жартысына тең, яғни $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$.

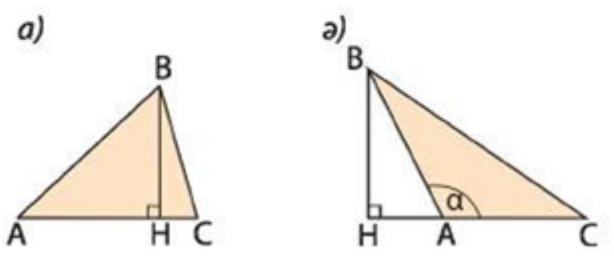


108-сурет

1 - е с е п. *Үшбұрыштың ауданы оның екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейтіндісінің жартысына тең болатынын* дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Егер үшбұрыш сүйірбұрышты болса (109, *а*-сурет), онда оның *BH* биіктігін жүргізіп: $BH = AB \cdot \sin A$ аламыз.

Сонымен, $S_{\Delta ABC} = 0{,}5 \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A$.

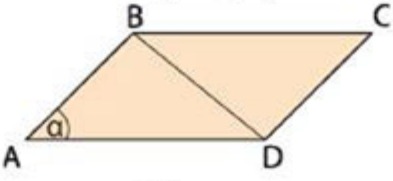


109-сурет

Егер үшбұрыш доғалбұрышты болса (109, ә-сурет), онда оның биіктігі $BH = AB \cdot \sin(180° - A)$ болады.

Доғал бұрыштың синусы онымен сыбайлас сүйір бұрыштың синусына тең болатынын айта кетелік, яғни $\sin(180° - A) = \sin A$, ал $\sin 90° = 1$. Яғни, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A$. Осы формуланы тікбұрышты үшбұрыш үшін де қолдануға болатынын өздігінен анықтаңдар.

2-есеп. *Параллелограмның ауданы оның іргелес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейтіндісіне тең екенін* дәлелдеу керек. $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.



110-сурет

Параллелограмды оның диагоналі арқылы өзара тең екі үшбұрышқа бөлу арқылы өздігінен дәлелдеңдер (110-сурет).

СҰРАҚТАР

1. Параллелограмның ауданы туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

2. Үшбұрыштың ауданы туралы теореманы тұжырымдап, дәлелдеңдер.

3. а) Үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрыш белгілі болса; ә) параллелограмның іргелес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы белгілі болса, үшбұрыш пен параллелограмның аудандарын қай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

223. а) Параллелограмның қабырғалары 12 см және 15 см. Ұзын қабырғасына түсірілген биіктігі 8 см-ге тең. Параллелограмның екінші биіктігін табыңдар.

ә) Үшбұрыштың екі қабырғасы 12 дм және 18 дм, ал олардың біріне жүргізілген биіктік 4 дм-ге тең. Екінші қабырғаға жүргізілген биіктікті табыңдар.

б) Табаны 50 см-ге, биіктігі 9 см-ге тең теңбүйірлі үшбұрышпен тең шамалас шаршының қабырғасын табыңдар.

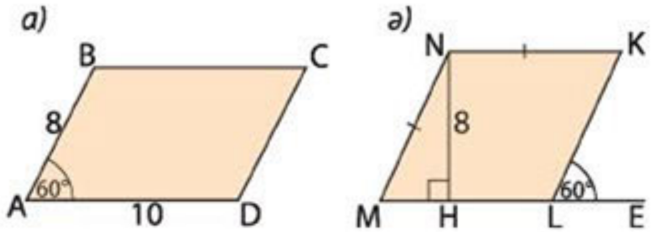
в) Үшбұрыштың қабырғасын k есе ұзартып, ал сол қабырғаға жүргізілген биіктікті n есе қысқартты. Үшбұрыштың ауданы өзгерді ме?

224. а) Табаны AC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының: 1) $AB = 10$ м, BH биіктігі 8 м; 2) $BC = 15$ см, $AC = 18$ см болса, оның ауданын табыңдар.

ә) Егер теңқабырғалы үшбұрыштың: 1) қабырғасы a-ға; 2) биіктігі h-қа; 3) оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы R-ге тең; 4) оған іштей сызылған шеңбердің радиусы r-ге тең болса, оның ауданын табыңдар.

225. Егер параллелограмның: а) сыбайлас қабырғалары 5 дм және 6 дм-ге, ал сүйір бұрышы 30°-қа; ә) периметрі 14 дм-ге, ал биіктіктері 3 дм және 5,4 дм-ге тең болса, оның ауданын табыңдар.

226. 111, *а, ә*-суреттердегі берілгендерді пайдаланып, параллелограмның ауданын табыңдар.



111-сурет

227. Егер: а) $P = 20$ см, $\alpha = 30°$; ә) $P = 48$ см, $\alpha = 60°$ болса, берілген периметрі мен α сүйір бұрышы бойынша ромбтың ауданын табыңдар.

В деңгейі

228. а) Ромбтың ауданы оның қабырғасының ұзындығының квадраты мен кез келген бұрышының синусының көбейтіндісіне тең екенін дәлелдеңдер. ә) Ауданы ең үлкен болуы үшін қабырғасы a болатын ромбтың түрі қандай болуы керек? Жауабын түсіндіріңдер.

229. а) Үшбұрыштың медианасы оны екі тең шамалас үшбұрышқа бөлетінін дәлелдеңдер. ә) AM және BK кесінділері – ABC үшбұрышының медианалары. AMB және ABK үшбұрыштарының аудандары тең екенін дәлелдеңдер. б) Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасына тұрғызылған теңқабырғалы үшбұрыштың ауданын оның катеттеріне тұрғызылған екі теңқабырғалы үшбұрыштың аудандарының қосындысымен салыстырыңдар.

230. а) ABC үшбұрышы берілген. Осы үшбұрышты аудандарының қатынасы $2:3$ қатынасындай болатын екі үшбұрышқа бөлетін BM түзуін жүргізіңдер.

ә) Ауданы 72 см^2-ге тең ABC үшбұрышы берілген. Оның BM медианасында $BD:DM=1:2$ болатындай D нүктесі белгіленген. ABD мен CBD үшбұрыштарының тең шамалас екенін дәлелдеп, олардың аудандарын табыңдар.

б) Ауданы 24 дм^2-ге тең ΔABC берілген. Егер MN – ΔABC-ның орта сызығы, $MN \parallel AC$, $K \in AC$ және $AK:KC=3:2$ болса, ΔMNK-ның ауданын табыңдар.

231. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 50 м. Үшбұрыштың бүйір қабырғасы табанынан 1 м-ге ұзын. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

ә) Берілген үшбұрыш ауданының оның орта сызықтарынан құралған үшбұрыштың ауданына қатынасын табыңдар.

232. а) Гипотенузасы 13 см, ал катеттерінің бірі 5 см болатын тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биіктігінің ұзындығын табыңдар.

ә) Гипотенузаға түсірілген биіктігі оны 4,8 см және 1,2 см кесінділерге бөлетін тікбұрышты үшбұрыштың ауданын табыңдар.

233. а) ABC үшбұрышында $\angle A=45°$, $\angle C=30°$, $BC=6$ см. Үшбұрыштың AB және AC қабырғаларын және ауданын табыңдар.

ә) Қабырғалары 26 см, 10 см және 24 см-ге тең үшбұрыштың ауданын табыңдар.

234. а) Бүйір қабырғасы 2,5 дм, ал олардың арасындағы бұрышы 135° болатын; ә) бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігі оны 3 см және 12 см кесінділерге бөлетін теңбүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

С деңгейі

235. а) Қабырғалары 9 см, 10 см, 17 см болатын үшбұрыштың үлкен биіктігін табыңдар. ә) Биіктіктері 2 см, 3 см және 4 см-ге тең болатын үшбұрыш бола ма?

236. Табаны 12 см, ал табанына жүргізілген биіктігі оның бүйір қабырғасы мен табанының орталарын қосатын кесіндіге тең болатын теңбүйірлі үшбұрыштың ауданын табыңдар.

237. Периметрі P, ал диагональдарының қиылысу нүктесінен әр қабырғасына дейінгі қашықтығы d болатын параллелограмның ауданын табыңдар.

238. Бірінші үшбұрыштың әр қабырғасы 1 см-ден кем, ал екінші үшбұрыштың әр қабырғасы 1 м-ден артық, бірақ бірінші үшбұрыштың ауданы екінші үшбұрыштың ауданынан артық болатын екі үшбұрыш бола ма? Егер болса, оған мысал келтіріңдер.

239. а) Параллелограмды оның төбесі арқылы өтетін түзумен, аудандарының қатынасы 1 : 2 қатынасындай болатын екі көпбұрышқа бөліңдер.

ә) Берілген үшбұрышқа тең шамалас болатын сүйір бұрышы берілген параллелограмм салыңдар. (Евклидтің «Негіздер» кітабынан есеп.)

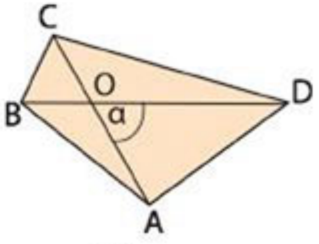
ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Ромб салып, оның биіктігі мен диагональдарын жүргізіңдер. Ромбтың қабырғасын, биіктігін және диагональдарын өлшеңдер. Оның қабырғасының ұзындығы мен биіктігінің көбейтіндісін диагональдарының ұзындықтары көбейтіндісінің жартысымен салыстырыңдар.

23. Дөңес төртбұрыштың ауданы

Т е о р е м а. **Дөңес төртбұрыштың ауданы оның диагональдары мен олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейтіндісінің жартысына тең.**

Д ә л е л д е у і. $ABCD$ дөңес төртбұрышы берілген болсын, оның AC және BD диагональдары O нүктесінде қиылысып, $AC = d_1$, $BD = d_2$, α – диагональдарының арасындағы бұрышы болсын (112-сурет).



112-сурет

Төртбұрыштың ауданы: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}$ болатынын дәлелдеу керек.

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}(AO \cdot OB \cdot \sin(180° - \alpha) + BO \cdot OC \cdot \sin \alpha +$$

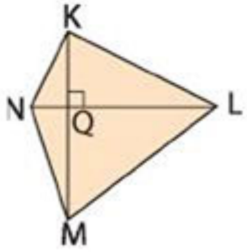
$$+ CO \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) + DO \cdot OA \cdot \sin \alpha).$$

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ екенін ескеріп:

$\frac{1}{2}\sin \alpha \cdot (BO(AO + OC) + OD(CO + OA)) = \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot (BO \cdot AC + OD \cdot AC) =$

$= \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot AC(BO + OD) = \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$ аламыз.

Дәлелдеу керегі де осы еді.



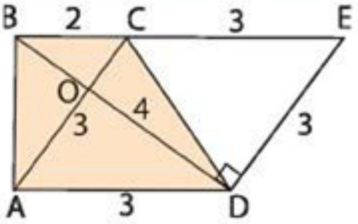
113-сурет

Егер дөңес төртбұрыштың диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда оның ауданы диагональдарының көбейтіндісінің жартысына тең болады. Мысалы, $MNKL$ төртбұрышының MK және NL диагональдары өзара перпендикуляр (113-сурет). Ал, $\sin 90° = 1$, яғни $S_{MNKL} = 0{,}5 \cdot MK \cdot NL$ болады.

Дербес жағдайда ромбтың S ауданы оның диагональдарының көбейтіндісінің жартысына тең: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2}$, мұндағы d_1, d_2 – ромбтың диагональдары.

1 - е с е п. Трапецияның табандары 3 см және 2 см, ал диагональдары – 4 см және 3 см. Трапецияның ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCD$ трапециясы берілген болсын. $DE \parallel AC$ жүргізейік (114-сурет). BDE үшбұрышының қабырғалары 3 см, 4 см және 5 см, яғни, ол тікбұрышты (Пифагор теоремасына кері теорема бойынша). $\angle BDE = 90°$, сондықтан



114-сурет

$\angle AOD = 90°$ (параллель түзулердің қасиеті бойынша). Трапецияның диагональдары перпендикуляр болғандықтан, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 6$ (см^2).

Ж а у а б ы. 6 см^2.

СҰРАҚТАР

1. Ромбтың ауданы оның диагональдарының көбейтіндісінің жартысына тең екенін дәлелдеңдер.
2. Диагональдары мен олардың арасындағы бұрышы белгілі болса, дөңес төртбұрыштың ауданын қай формуламен есептеуге болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

240. а) Егер трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр, ұзындықтары 3,2 дм және 14 дм-ге тең болса, оның ауданын табыңдар. ә) Дөңес төртбұрыштың диагональдары өзара перпендикуляр, ұзындықтары 6 см және 9 см. Оның ауданын табыңдар.

241. Теңбүйірлі трапецияның диагоналі $4\sqrt{3}$ дм, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 60°. Трапецияның ауданын табыңдар.

242. Ромбтың ауданы 216 см^2, ал диагональдарының қатынасы 3 : 4 қатынасындай. Ромбтың қабырғасын табыңдар.

В деңгейі

243. Тіктөртбұрыштың периметрі 68 см, қабырғаларының айырымы 14 см. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының орталары төбелері болатын төртбұрыштың түрін анықтап, ауданын табыңдар.

244. Теңбүйірлі трапецияның орта сызығы мен биіктігі, сәйкесінше, 15 см және 6 см. Оның қабырғаларының орталары төбелері болатын төртбұрыштың түрін анықтап, ауданын табыңдар.

245. Табандары BC және AD болатын $ABCD$ трапециясында $AD = 10$ см, $BC = 5$ см, $AC = 9$ см, $BD = 12$ см. Трапецияның ауданын табыңдар.

246. Тіктөртбұрыштың ауданы $16\sqrt{3}$ см^2, ал диагональдарының арасындағы бұрышы 120°. Тіктөртбұрыштың қабырғаларын табыңдар.

С деңгейі

247. Диагональдары: а) 11 см; ә) 3 дм болатын тіктөртбұрыштың ауданының ең үлкен мәнін табыңдар.

248. а) Шаршының ауданын оның d диагоналі арқылы өрнектеңдер.

ә) Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ төртбұрышы берілген. $S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD}$ болатынын дәлелдеңдер.

249. Егер теңбүйірлі трапецияның d диагоналі үлкен табанымен 45° бұрыш жасаса, оның ауданын табыңдар.

250. а) Жер телімінің сызбадағы ауданы 552,25 см^2 (масштаб 1:10 000). Жер телімінің нақты ауданын табыңдар. Жауабын гектармен есептеңдер.

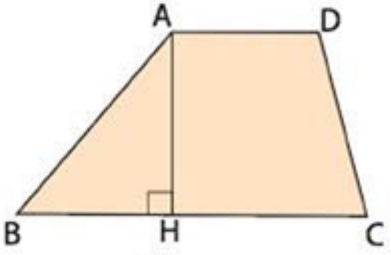
ә) Сазбатпақ өңірдегі жер телімі төртбұрыш пішінді. Ол жерді баспастан ауданын қалай есептеуге болады? (Ежелгі грек математигі Геронның есебі.)

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Табандары BC және AD болатын $ABCD$ трапециясын салыңдар. Оның BD диагоналіне параллель болатын CM кесіндісін жүргізіңдер (M нүктесі AD сәулесіне тиісті). Неліктен ACM үшбұрышының ауданы трапеция табандарының ұзындықтары қосындысының жартысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болатынын түсіндіріңдер.

24. Трапецияның ауданы

Трапецияның биіктігі деп оның бір табанының нүктесінен екінші табаны жататын түзуге жүргізілген перпендикулярды айтатынын еске сала кетейік. Трапецияның табандары жататын түзулердің арақашықтығы да биіктік деп аталады. 115-суреттегі AH кесіндісі – $ABCD$ трапециясының биіктігі.



115-сурет

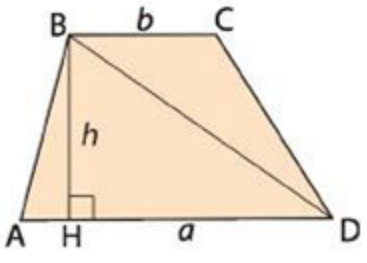
Теорема. **Трапецияның ауданы оның табандарының қосындысының жартысы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.**

Дәлелдеуі. Табандары $AD = a$, $BC = b$, биіктігі $BH = h$ болатын $ABCD$ трапециясы берілген болсын (116-сурет).

$\boldsymbol{S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h}$ болатынын дәлелдеу керек.

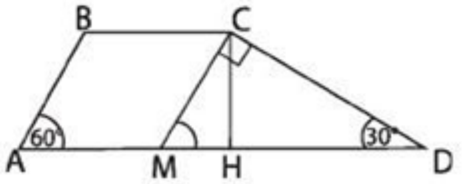
Трапецияны BD диагоналімен ABD және BCD үшбұрыштарына бөліп, мынаны аламыз: $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$.

Дәлелдеу керегі де осы еді.



116-сурет

Е с е п. Табандары 6 см және 2 см, ал ұзын қабырғасына іргелес бұрыштары 60° және 30° болатын трапецияның ауданын табу керек.



117-сурет

Ш е ш у і. $ABCD$ трапециясында $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle D = 30°$ болсын. Трапецияның CH биіктігі мен $CM \parallel AB$ кесіндісін жүргізейік (117-сурет). Сонда $\angle CMD = \angle A$ (CM және AB параллель түзулерін AD қиюшымен қиғандағы сәйкес бұрыштар). Демек, ΔMCD – тікбұрышты. $ABCM$ параллелограмында $AM = BC = 2$ см, сонда $MD = 4$ см. MCD үшбұрышында MC қабырғасы 30°-қа қарсы жатыр, сондықтан $MC = \frac{1}{2}MD = 2$ см, $CH = MC \cdot \sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см). Трапецияның ауданы: $S_{ABCD} = \frac{6+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

Ж а у а б ы. $4\sqrt{3}$ см^2.

СҰРАҚТАР

1. Трапецияның ауданының формуласын дәлелдеңдер.
2. Трапецияның ауданы оның орта сызығы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болатынын дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

251. а) Тікбұрышты трапецияның кіші табаны – 10 см, орта сызығы – 16 см және бұрыштарының бірі – 60°. Трапецияның ауданын табыңдар.
ә) Табандары 8 дм және 12 дм, ал бұрыштарының бірі 135° болатын тікбұрышты трапецияның ауданы мен периметрін табыңдар.

252. Егер теңбүйірлі трапецияның: а) табандары мен бүйір қабырғасы, сәйкесінше, 11 см, 17 см және 5 см; ә) табандары 8 см, 2 см және бұрышы 60° болса, ауданын табыңдар.

253. а) Трапецияның ауданын оның c орта сызығы және h биіктігі арқылы өрнектеңдер. ә) Теңбүйірлі трапецияның орта сызығы 10 см, бүйір қабырғасы 12 см, ал кіші табанына іргелес бұрышы 135°, ауданын табыңдар.

В деңгейі

254. а) Теңбүйірлі трапецияның диагоналі оның доғал бұрышын қақ бөледі. Трапецияның кіші табаны 3 м, периметрі 42 м. Трапецияның ауданын табыңдар.

ә) Биіктігі 0,8(6) м, ал орта сызығы $1,5 \cdot 10^7$ м трапецияның ауданына тең болатын «Қаратал құмдары» табиғи қаумалының ауданын (гектармен) табыңдар.

«Қаратал құмдары» ботаникалық қаумалы

255. а) Трапецияның параллель қабырғаларының ұзындықтары 25 дм және 4 дм, ал параллель емес қабырғалары – 20 дм және 13 дм. Трапецияның ауданын табыңдар.

ә) Табандары 5 см және 19 см, ал бүйір қабырғалары 13 см және 15 см болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңдар.

256. а) Табандары 20 см және 12 см, диагоналі бүйір қабырғасына перпендикуляр болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңдар.

ә) Қағаздан теңбүйірлі трапеция қиып алып, оны тіктөртбұрыш құрастыруға болатындай екі бөлікке бөліңдер.

257. а) Егер теңбүйірлі трапецияның диагональдары өзара перпендикуляр болса, онда оның ауданы трапецияның биіктігінің квадратына тең болатынын дәлелдеңдер.

ә) Диагональдары өзара перпендикуляр, табандары 6 см және 10 см болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңдар.
б) Диагональдары O нүктесінде қиылысатын $ABCD$ төртбұрышы берілген. Егер AOB мен COD үшбұрыштарының аудандары тең, ал оның AD мен BC қабырғалары тең болмаса, онда ол төртбұрыштың трапеция болатынын дәлелдеңдер.

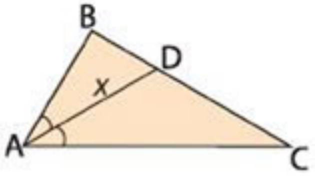
C деңгейі

258. Радиусы 4 см шеңберге AD диаметрі және оған параллель, $60°$ доғаны керетін BC хордасы жүргізілген. $ABCD$ трапециясының ауданын табыңдар.

259. а) Трапецияны оның табандарын қиятын түзумен екі тең шамалас трапецияға бөліңдер. Есептің неше шешімі бар?
ә) Тең шамалас ΔABC мен ΔMNK AC мен MK тең кесінділері бір түзудің бойында, ал үшбұрыштар сол түзудің бір жартыжазықтығында орналасқан. Сол түзуге параллель болатын түзу ΔABC-ның қабырғаларын D және F нүктелерінде, ΔMNK-ны E және O нүктелерінде қияды. $DF = EO$ болатынын дәлелдеңдер.

25. «Фигуралардың аудандары» тақырыбына есептер

1 - е с е п. Үшбұрыштың екі қабырғасының ұзындықтары 6 см және 12 см, олардың арасындағы бұрышы 60°. Үшбұрыштың берілген бұрышының биссектрисасының ұзындығын табу керек.



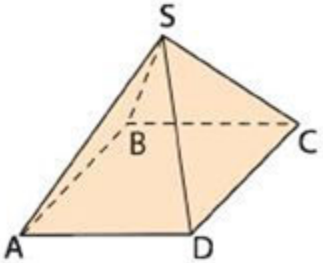
118-сурет

Ш е ш у і. ABC үшбұрышында $AB = 6$ см, $AC = 12$ см, $\angle A = 60°$ болсын (118-сурет). Ізделінді биссектрисаның ұзындығын $AD = x$ см деп белгілейік. Сонда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 60° = 18\sqrt{3}$ (см²). Немесе $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BAD} + S_{\Delta DAC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 30° = \frac{3}{2}x + 3x = \frac{9}{2}x$ (см²). Демек, $18\sqrt{3} = \frac{9}{2}x$, бұдан $x = 4\sqrt{3}$ болады.

Ж а у а б ы. $4\sqrt{3}$ см.

2 - е с е п. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың табаны – қабырғасы 1 м-ге тең шаршы. Пирамиданың барлық жақтары аудандарының қосындысын табу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді аудан осы пирамиданың табанының ауданы мен өзара тең төрт бүйір жағының аудандарының қосындысына тең (119-сурет). Пирамиданың табаны – қабырғасы 1 метрге тең шаршы. Оның ауданы 1 м²-ге тең. Әрбір бүйір жағы – қабырғасы 1 м-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштар. Оның ауданы: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (м²). Сонда ізделінді аудан: $(1 + \sqrt{3})$ м² болады.



119-сурет

Ж а у а б ы. $(1 + \sqrt{3})$ м².

ЖАТТЫҒУЛАР

В деңгейі

260. а) Катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биссектрисасының ұзындығын табыңдар.

ә) Катеттері $BC = a$, $AC = b$ болатын тікбұрышты ABC үшбұрышы берілген. D – B бұрышының биссектрисасы мен AC кесіндісінің орта перпендикулярының қиылысу нүктесі. BCD үшбұрышының ауданын табыңдар.

261. а) Катеттері 12 см және 16 см болатын тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузаға түсірілген; ә) егер параллелограмның периметрі 51 см, ауданы 90 $см^2$ және кіші биіктігі 5 см-ге тең болса, оның кіші қабырғасына жүргізілген биіктігінің ұзындығын табыңдар.

262. а) Үлкен табаны 30 дм, бүйір қабырғасы 10 дм, үлкен табанына іргелес бұрышы 45° болатын; ә) табандары a және b ($a > b$), үлкен табанына іргелес бұрышы β болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын табыңдар.

263. Галапагос теңіз қорығы 133 000 $км^2$ жерді, ал Қазақстанның Катон-Қарағай ұлттық саябағы 643 477 га жерді алып жатыр. Осы аудандардың қайсысы үлкен және неше есе үлкен? Жауабын бірлікке дейінгі дәлдікпен беріңдер.

Галапагос конолофы

Катон-Қарағай саябағындағы Көккөл сарқырамасы

264. а) Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасына түсірілген биіктігі h, ал табанындағы бұрышы – α. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.
ә) Табаны 5 см, ал бүйір қабырғасы 4 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш берілген. Табанының кез келген нүктесінен бүйір қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының қосындысын табыңдар. Алынған шаманы үшбұрыштың бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігімен салыстырыңдар.
265. Параллелограмның диагоналі 12 см, қабырғаларының бірі 8 см, ал олардың арасындағы бұрышы 30°. Параллелограмның ауданын табыңдар.
266. а) Тікбұрышты трапецияның екі кіші қабырғасы 6 см-ге тең, ал үлкен бұрышы 135°; ә) 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табандары 14 см және 10 см, ал үлкен табанындағы бұрыштары 30° және 45° болатын трапецияның ауданын табыңдар.
267. ABC тікбұрышты үшбұрышына іштей D, E, F төбелері, сәйкесінше, AC, AB, BC қабырғаларында жататындай $CDEF$ тіктөртбұрышы салынған. $\frac{EF}{ED} = \frac{1}{2}$, $AC = 6$ дм, $BC = 8$ дм болса, $CDEF$ тіктөртбұрышының ауданын табыңдар.
268. ABC сүйірбұрышты үшбұрышының CH биіктігі 5 см, $\angle A = 65°$, $\angle BCH = 40°$. ABC үшбұрышының ауданын 0,1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

С деңгейі

269. а) Егер үшбұрыштың үш медианасын жүргізсе, онда олар үшбұрышты 6 тең шамалас үшбұрыштарға бөлетінін дәлелдеңдер.
ә) Қабырғасы 10 см-ге тең болатын теңқабырғалы үшбұрыш берілген. Үшбұрыштың ішіндегі кез келген M нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтардың қосындысын табыңдар.
270. а) ABC үшбұрышында AC қабырғасы 5 см және медианалары $AA_1 = 4,5$ см, $CC_1 = 6$ см. ABC үшбұрышының ауданын та-

бындар; ә) қабырғасы мен биіктігінің айырымы d-ға тең болатын теңқабырғалы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

271. а) Қағаздан екі тең трапеция қиып алып, оның біреуін үшбұрыш құрастыруға болатындай, ал екіншісін параллелограмм құрастыруға болатындай етіп екіге бөліңдер.

ә) Берілген бұрыштың ішінде жататын нүктеден одан ауданы ең кіші болатын үшбұрыш қиятындай етіп түзу жүргізіңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

272. 1A) Қабырғалары 4 см және 9 см болатын тіктөртбұрышқа тең шамалас шаршы салыңдар.

2A) Қабырғасы 4 м және бұрышы 30° болатын ромбтың ауданын табыңдар.

3B) Тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті екіншісінен 1 дм-ге қысқа, гипотенузасы 5 дм. Оның ауданын табыңдар.

4B) M нүктесі – $ABCD$ шаршысының AB қабырғасының ортасы. N нүктесі AD қабырғасын A нүктесінен бастап есептегенде 1 : 3 қатынаста бөледі. Егер $S_{\Delta AMN} = 1$ см^2 екені белгілі болса, $ABCD$ шаршысының ауданын табыңдар.

5C) Табандары AD және BC болатын $ABCD$ трапециясы берілген. O – диагональдарының қиылысу нүктесі. AOB және COD үшбұрыштарының аудандары тең болатынын дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Координата жазықтығына қандай да бір кесінді салып, ортасын белгілеңдер. Кесінді ұштарының және ортасының координаталарын табыңдар. Кесінді ортасының координаталарын оның ұштарының аттас координаталарының қосындысының жартысымен салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Бізге жеткен Мысыр папирустары мен ежелгі Вавилон мәтіндерін негізге алып, біздің заманымызға дейінгі екінші мыңжылдықта адамдар тіктөртбұрыш, үшбұрыш, трапеция және өзге де фигуралардың аудандарын таба білгендерін байқауға болады. Ауданын табуға арналған формулалардың көбі жуық шамамен алынған. Мысалы, мысырлықтар теңбүйірлі үшбұрыштың табаны мен бүйір бұрышы 90°-қа жуық болған жағдайда, оның ауданы табаны мен бүйір қабырғасының көбейтіндісінің жартысына тең болады деп есептеген. Біздің заманымыздың бірінші ғасырының өзінде көптеген фигуралардың аудандарын есептеуге арналған нақты формулалар табылған. Аудандарының формулалары табылған алғашқы фигуралар – шаршы мен тіктөртбұрыш. Бұл фигуралардың және тікбұрышты үшбұрыш аудандарының формулалары теоремаларды (мәселен, Пифагор теоремасын) дәлелдеу үшін пайдаланылған.

Бұл тарихи дерек туралы ақпаратты ғаламтордан іздеп табыңдар.

Аудандар теориясын жетілдіруде және оны қолдануда тең құрамдас және тең шамалас ұғымдарының мәні зор. Ең қызығы, 1832 жылы венгр математигі Ф. Бойяи (1775–1856) және 1833 жылы неміс офицері, математикаға қызығушы П. Гервин жеке-жеке тең шамалас көпбұрыштардың тең құрамдас болатыны туралы теореманы дәлелдеген.

Ф. Бойяи (1775–1856)

IV. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ

Тарауды оқу барысында

• тікбұрышты координаталар жүйесін;
• кесіндінің ортасының координаталары, екі нүктенің арақашықтығы формулаларын;
• жазықтықтағы сызықтар теңдеулерінің анықтамаларын;
• түзудің, шеңбердің теңдеулерін **білу керек.**

• берілген координаталары бойынша координаталық жазықтыққа нүктелер сала алу;
• координаталық жазықтықтағы нүктелердің координаталарын, екі нүктенің арақашықтығын таба алу;
• кесіндінің ортасының координаталарын, екі нүктенің арақашықтығының формулаларын қорытып шығара алу;
• түзу мен шеңбердің теңдеулерін таба алу;
• тікбұрышты координаталар жүйесін есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

26. Жазықтықтағы нүктелердің координаталары; кесіндінің ортасының координаталары. Екі нүктенің арақашықтығы

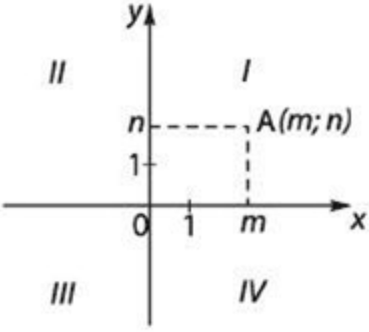
Санақ басы, бірлік кесіндісі және бағыты көрсетілген түзу *координаталық түзу* немесе *сандық ось* деп аталатынын еске салайық.

120-сурет

Солдан оңға қарай оң бағыт деп есептеледі. Түзудегі нүктенің орны нүктенің координатасы деп аталатын бір ғана санмен беріледі. Санақ басы координаталар басы деп аталады, оның координатасы 0-ге тең. $A(x_1)$ және $B(x_2)$ екі нүктенің арақашықтығы: $AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ болады (120-сурет).

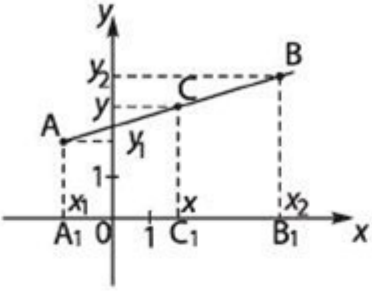
Санақ басы болатын O нүктесінде қиылысатын, осы нүктеден бастап бірлік кесіндісі таңдап алынған өзара перпендикуляр Ox және Oy сандық түзулері орналасқан жазықтық *тікбұрышты координаталар жүйесі* деп аталады. Осьтердегі бірлік кесінділер көп жағдайда бірдей етіп таңдап алынады. O нүктесі координаталар басы, Ox және Oy – координата осьтері, Ox – *абсциссалар* осі, Oy *ординаталар* осі деп аталады. Координата осьтері координаталық жазықтықты ширек немесе координаталық бұрыш деп аталатын 4 тікбұрышқа бөлінеді.

Мысалы, 121-суретте I–IV координаталық бұрыштар белгіленген. Координаталық жазықтықтың әрбір A нүктесіне сол нүктенің координаталары болатын x және y сандары сәйкес келеді, x – абсциссасы, y – ординатасы. Координаталары x және y болатын A нүктесін $A(x; y)$ деп белгілейді. Кейде «координаталары m және n болатын нүкте» деген сөзді қысқартып, «$(m; n)$ нүктесі» деп жазады. Нүктенің координаталар жұбында бірінші абсциссасын, екінші ординатасын жазады.



121-сурет

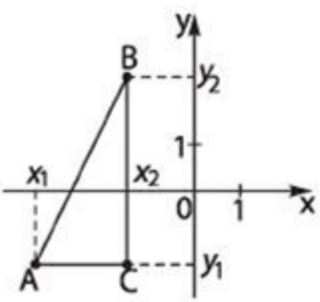
Теорема. **Ұштары $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ болатын AB кесіндісінің ортасы – C нүктесінің $(x; y)$ координаталары: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.**



122-сурет

Дәлелдеуі. Алдымен, AB кесіндісі Oy осіне параллель болмайтын жағдайды қарастырайық, мұндағы $x_1 \neq x_2$ (122-сурет). C_1 нүктесі A_1B_1 кесіндісінің ортасы болғандықтан, $A_1C_1 = B_1C_1$, яғни $|x - x_1| = |x - x_2|$ болады. Осы теңдіктен $x_1 \neq x_2$ екенін ескеріп, $x - x_1 = -(x - x_2)$ екені шығады, яғни $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. C нүктесінің ординатасы да дәл осылай табылады. Оны өздігінен дәлелдеңдер. Егер $AB \parallel Ox$ немесе $AB \parallel Oy$ болса, онда C нүктесінің координаталары да сол көрсетілген формуламен табылады.

Теорема. **$A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.**



123-сурет

Дәлелдеуі. Координаталық түзудегі екі нүктенің арақашықтығын табамыз: $AC = |x_1 - x_2|$, $BC = |y_1 - y_2|$ (123-сурет). Пифагор теоремасы бойынша тікбұрышты ACB үшбұрышынан $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ аламыз. AB кесіндісінің координата осьтеріне қатысты қалай орналасқанына қарамастан, AB-ның ұзындығы көрсетілген формуламен есептелетініне көз жеткізіңдер.

Есеп. Төбелері $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(6; 6)$ болатын үшбұрыш берілген. ABC үшбұрышының AM медианасының ұзындығын табу керек.

Шешуі. Кесінді ортасының координаталарын есептеу формуласынан M нүктесінің координаталары:

$x = \frac{3+6}{2} = 4,5$, $y = \frac{2+6}{2} = 4$, яғни $M(4,5; 4)$ болады. Екі нүктенің арақашықтығының формуласы бойынша: $AM = \sqrt{(1-4,5)^2 + (4-4)^2} =$ $= 3,5$.

Ж а у а б ы. 3,5.

СҰРАҚТАР

1. Тікбұрышты координаталар жүйесі дегеніміз не екенін және нүктенің координаталары қалай анықталатынын түсіндіріңдер.
2. Кесінді ортасының координаталарының формуласын қорытып шығарыңдар.
3. Берілген координаталары бойынша екі нүктенің арақашықтығын есептеу формуласын қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі

273. а) A нүктесінің координаталары (3; 5). Оған: 1) координаталар басына; 2) абсциссалар осіне; 3) ординаталар осіне қарағанда симметриялы нүктелердің координаталарын табыңдар.

ә) Абсциссасы 6-ға тең нүкте координаталар басынан 10-ға тең қашықтықта жатыр. Осы нүктенің ординатасын табыңдар.

«Алтын ер-тоқым» асуы

274. Қазақстанның «Алтын-емел» ұлттық табиғи саябағы асуындағы бедер алтын ер-тоқымды еске түсіреді. Дәл осылай оны Шыңғысхан жасағымен Орта Азияға бара жатқанда атаған еді. Оқиға қай жылы болғаны $A(2018; 3030)$ және $B(2018; 1811)$ нүктелерінің арақашықтығын тапқанда шыққан санмен өрнектеледі.

275. (–5; 10) нүктесінен: а) Ox осіне; ә) Oy осіне; б) координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар.

В деңгейі

276. а) M нүктесі координаталар басынан N нүктесіне қарағанда 3 есе артық қашықтықта жатыр. Егер $N(-3; 4)$ болса, OM-ді табыңдар.

ә) Кесіндінің ұзындығы 6-ға тең. 1) Осы кесінді ұштарының; 2) қабырғасы 6-ға тең теңқабырғалы үшбұрыш төбелерінің координаталарын оңай табуға болатындай координаталар жүйесін салыңдар.

277. B нүктесі III ширектің биссектрисасында жатыр және координаталар басынан $4\sqrt{2}$ қашықтықта орналасқан. Осы нүктенің координаталарын табыңдар.

278. а) $A(4; -3)$, $B(-2; 1)$ болса, AB кесіндісінің ортасының координаталарын табыңдар.

ә) Координаталар жүйесінің координаталық осьтері өшіріліп, ондағы белгіленген тек $A(5; 2)$ мен $B(-5; 2)$ нүктелері ғана қалыпты. Осы координаталар жүйесін қалпына келтіріңдер.

279. AB кесіндісі мен оның ортасы болатын C нүктесі берілген. Егер: а) $A(1,5; 7)$, $C(2; 3,5)$ болса, B нүктесінің координаталарын; ә) $B\left(-1\frac{2}{3}; 4,5\right)$, $C\left(-3; -2\frac{1}{3}\right)$ болса, A нүктесінің координаталарын табыңдар.

280. Төбелері $A(-5; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(5; -4)$ болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрыштың медианаларының ұзындықтарын табыңдар.

281. Төбелерінің координаталары (–1; –2), (2; –5), (1; –2), (–2; 1) болатын төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеп, оның диагональдарының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

282. а) $A(3; -6)$, $B(-2; 4)$ және $C(1; -2)$ нүктелері бір түзудің бойында жататынын; ә) $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $O(0; 0)$ нүктелері шаршының төбелері болатынын дәлелдеңдер.

C деңгейі

283. а) $A(3; 7)$ және $B(-5; 9)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын Ox осіндегі нүктенің; ә) координата осьтерінен бірдей қашықтықта жататын және $(10; 0)$ нүктесінен арақашықтығы $5\sqrt{2}$ болатын нүктенің координаталарын табыңдар.

284. Төбелері $A(-4; -1)$, $B(2; -9)$, $C(7; 1)$ болатын үшбұрыш теңбүйірлі болатынын дәлелдеңдер және оның табанына жүргізілген биссектрисасының ұзындығын табыңдар.

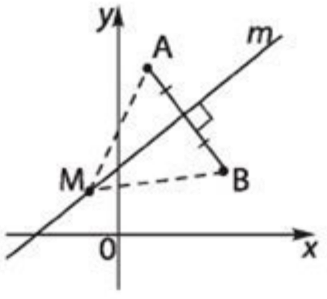
285. $ABCD$ шаршысы I ширекте орналасқан және оның төбелерінің координаталары $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $D(5; 1)$. M нүктесі – CD қабырғасының ортасы, ал N нүктесі AC-ға тиісті және $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$. M және N нүктелерінің координаталарын табыңдар және DMN үшбұрышының теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер.

ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМА

xOy жазықтығына $A(4; 5)$ нүктесін белгілеңдер. OA түзуін жүргізіп, оның Ox осімен жасайтын көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар.

27. Жазықтықтағы сызықтардың теңдеулері. Түзудің теңдеулері

Жазықтықтағы *сызықтың теңдеуі* деп осы сызықта жататын кез келген нүктенің координаталарын қанағаттандыратын және осы сызықта жатпайтын нүктенің координаталарын қанағаттандырмайтын екі айнымалысы бар теңдеуді айтады.



124-сурет

Түзудің теңдеуін қорытып шығарайық. m – берілген координаталар жүйесіндегі кез келген түзу болсын. AB кесіндісінің симметрия осі m түзуі болатындай етіп екі $A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$ нүктелерін алайық (124-сурет). Егер $M(x; y)$ нүктесі m түзуінде жататын болса, онда m түзуі AB кесіндісінің орта перпендикуляры болғандықтан, $AM = MB$ болады. Берілген координаталары бойынша екі нүктенің арақашықтығын есептеу формуласын қолданып және $AM^2 = MB^2$ екенін ескере отырып, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$ теңдеуін аламыз. Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерін біріктіреміз:

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2;$$

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0.$$

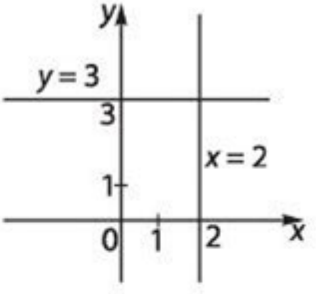
$2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$ деп белгілесек, теңдеу: $ax + by + c = 0$ түріне келеді, мұндағы a, b, c – кез келген сан және a, b сандарының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес. Егер N нүктесі m түзуінде жатпаса, онда $AN^2 \neq BN^2$ және N нүктесінің координаталары $ax + by + c = 0$ теңдеуін қанағаттандырмайды.

Сонымен, координаталар жүйесіндегі *түзудің теңдеуі* деп екі айнымалысы бар $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ теңдеуін айтады. Осы түзудің a, b, c коэффициенттеріне байланысты координаталар осьтерінде орналасуын қарастырайық.

Егер $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$ болса, онда $ax + by + c = 0$ түзуінің теңдеуін $y = 0x + p$ түрінде жазуға болады, мұндағы $p = -\frac{c}{b}$ немесе $\boldsymbol{y = p}$.

Бұл Ox осіне параллель және Oy осін $(0;\ p)$ нүктесінде қиятын түзу. $c = 0$ болғанда Ox осімен беттесетін $y = 0$ түзуін аламыз.

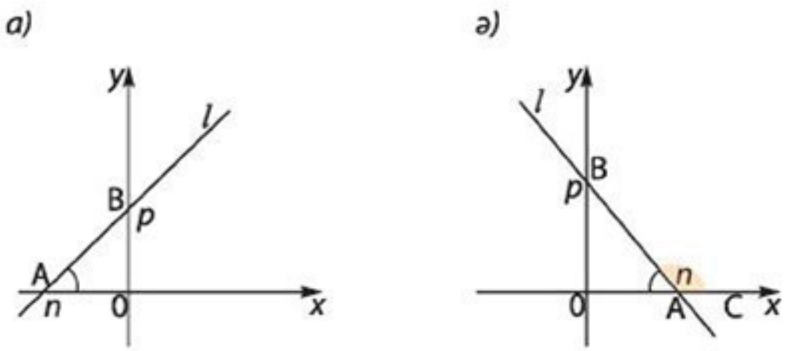
Егер $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b = 0}$ болса, онда түзудің $ax + by + c = 0$ теңдеуін $x = 0y + q$ түрінде жазуға болады, мұндағы $q = -\frac{c}{a}$ немесе $\boldsymbol{x = q}$. Бұл Oy осіне параллель және Ox осін $(q;\ 0)$ нүктесінде қиятын түзу. $c = 0$ болғанда Oy осімен беттесетін $x = 0$ түзуін аламыз. Мысалы, 125-суретте $y = 3$ және $x = 2$ түзулері көрсетілген.



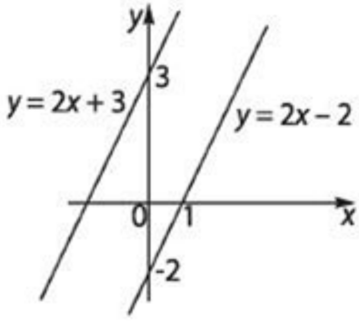
125-сурет

Егер $\boldsymbol{b \neq 0}$ болса, онда $ax + by + c = 0$ түзуін $\boldsymbol{y = kx + p}$ түрінде жазуға болады, мұндағы $k = -\frac{a}{b}$, $p = -\frac{c}{b}$. Бұл алгебра курсынан белгілі Oy осін $(0;\ p)$ нүктесінде, ал Ox осін $(n;\ 0)$ нүктесінде қиятын түзудің теңдеуі.

l түзуі $y = kx + p$ формуласымен берілсін және Oy осін B нүктесінде, ал Ox осін A нүктесінде қиятын болсын (126-сурет). A нүктесі $y = kx + p$ түзуде жататындықтан, оның координаталары: $0 = nk + p$ теңдеуін қанағаттандырады, бұдан $k = -\frac{p}{n}$. ABO үшбұрышынан, егер $n < 0$ болса, онда $k = -\frac{p}{n} = \operatorname{tg} A$ (126, *а*-сурет) немесе егер $n > 0$ болса, $k = -\frac{p}{n} = -\operatorname{tg} A$ табамыз (126, *ә*-сурет).



126-сурет



127-сурет

Сонымен, егер $k > 0$ болса, онда $\angle BAO$ – сүйір, ал егер $k < 0$ болса, онда $\angle BAC$ – доғал болады. k коэффициенті түзудің *бұрыштық коэффициенті* деп аталады. Егер екі түзудің теңдеуінде бұрыштық коэффициенттері тең болса, онда бұл түзулер өзара параллель болады, 127-суретте $y = 2x + 3$ және $y = 2x - 2$ түзулері көрсетілген.

1 - е с е п. $A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$, мұндағы $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін құру керек.

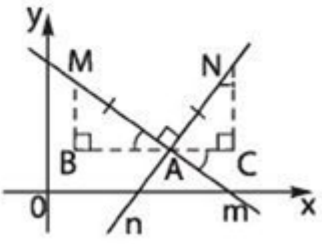
Ш е ш у і. Түзудің $y = kx + b$ теңдеуіндегі k мен b-ның мәндерін табамыз. Түзу $A(x_1; y_1)$ нүктесінен өтетіндіктен, $y_1 = kx_1 + b$. Бұдан $b = y_1 - kx_1$ болады да, түзудің теңдеуі $y - y_1 = k(x - x_1)$ түріне келеді. Түзу B нүктесінен өтетіндіктен $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ болады, бұдан $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. k-ның мәнін $y - y_1 = k(x - x_1)$ теңдеуіне қойып, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ аламыз. Осы теңдіктің екі жағын $y_2 - y_1$-ге бөліп, **$(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуін** $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ түріне келтіреміз.

Ж а у а б ы. $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

2 - е с е п. а) Координаталар осьтеріне параллель емес перпендикуляр түзулердің бұрыштық коэффициенттерінің көбейтіндісі –1-ге тең болатынын дәлелдеу керек. ә) (–8; 0) нүктесі арқылы өтетін және $4x - 7y + 26 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін жазу керек.

Д ә л е л д е у і. а) m және n түзулері өзара перпендикуляр және A нүктесінде қиылысатын болсын (128-сурет). $AM = AN$ болатындай m түзуінен M нүктесін, ал n түзуінен N нүктесін белгілейік. A нүктесі арқылы Ox осіне параллель AB түзуін, M және N нүктелері арқылы Oy осіне параллель MB және NC түзулерін жүргізейік (128-сурет). Гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша өзара тең болатын AMB және ANC тікбұрышты үшбұрыштарын алдық.

n түзуінің k_1 бұрыштық коэффициенті: $k_1 = \text{tg}\angle NAC = \frac{NC}{AC}$, ал m түзуінің k_2 бұрыштық коэффициенті: $k_2 = -\text{tg}\angle MAB = -\frac{MB}{AB}$. AMB және ANC үшбұрыштарының теңдігінен $MB = AC$, $AB = NC$ екені шығады, яғни $k_1 \cdot k_2 = -\frac{NC}{AC} \cdot \frac{MB}{AB} = -1$ болады.



128-сурет

ә) $4x - 7y + 26 = 0$ түзуінің теңдеуін $y = \frac{4}{7}x + 3\frac{5}{7}$ түрінде жазайық. Берілген түзуге перпендикуляр $y = kx + p$ түздің теңдеуінің k және p коэффициенттерін табайық. $\frac{4}{7} \cdot k = -1$ болғандықтан, $k = -\frac{7}{4}$ болады. Есептің шарты бойынша, ізделінді түзу $(-8; 0)$ нүктесінен өтетіндіктен, $0 = -\frac{7}{4} \cdot (-8) + p$, $p = -14$. Сонда ізделінді түздің теңдеуі $y = -\frac{7}{4}x - 14$ болады, оны $7x + 4y + 56 = 0$ түрінде жазуға болады.

Ж а у а б ы. ә) $7x + 4y + 56 = 0$.

СҰРАҚТАР

1. Жазықтықтағы сызықтың теңдеуі дегеніміз не?
2. Түздің теңдеуін қорытып шығыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

286. а) $3x + 2y - 5 = 0$ түзуінде жататын кез келген үш нүктенің координаталарын табыңдар.

ә) $y = (x - 2)^2$ параболасына: 1) Ox осіне қарағанда; 2) Oy осіне қарағанда симметриялы болатын сызықтың теңдеуін жазыңдар.

287. Егер $M(m; n)$ нүктесі $x + y - 9 = 0$ түзуіне тиісті болса, онда $N(n; m)$ нүктесі де сол түзуге тиісті болатынын дәлелдеңдер.

288. $A(1; -2)$ нүктесі арқылы өтетін: а) абсцисса осіне параллель; ә) абсцисса осіне перпендикуляр болатын түздің теңдеуін жазыңдар.

289. $2x - 3y - 6 = 0$ және $4x - 6y - 25 = 0$ түзулерінің параллель болатынын дәлелдеңдер.

B деңгейі

290. Егер: а) $A(0; 3)$ және $\alpha = 30°$; ә) $A(2; 1)$ және $\alpha = 135°$ болса, A нүктесінен өтіп, Ox осімен α бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазыңдар.

291. а) 1) (0; 0) және (9; 10); 2) (3; 1) және (5; –4) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазыңдар.

ә) Қазақстанның «Бұйратау» ұлттық табиғи саябағында көптеген өсімдіктердің түрі өседі, оның ішінде Қызыл кітапқа енгізілген қызыл арша, сібірлік скерда және басқалары бар. Осы саябақта өсетін өсімдіктер саны мына есептің жауабымен өрнектеледі: «MN түзуінің Ox осімен қиылысу нүктесінің абсциссасын табыңдар, мұндағы $M(0; -69)$ және $N(-5; -70)$».

«Бұйратау» саябағы

292. Түзудің AB кесіндісі координата осьтерімен шектелген және $C(2; -1)$ нүктесінде қақ бөлінеді. Түзудің теңдеуін жазыңдар.

293. Төбелері $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ және $C(4; 0)$ нүктелері болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрыштың медианалары арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар.

294. $A(6; 0,5)$ нүктесі арқылы өтетін және: а) $y = 2x - 5$; ә) $8x + 4y + 3 = 0$ түзуіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

C деңгейі

295. Барлық нүктелері: а) $A(1; 1)$ және $B(3; 3)$; ә) $M(0; 2)$ және $N(4; -2)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын түзудің теңдеуін жазыңдар.

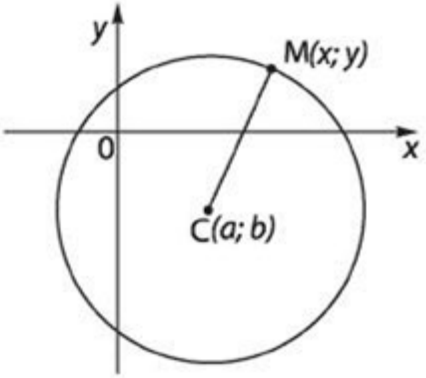
296. Барлық нүктелерінен $A(1; 0)$ және $B(-1; 2)$ нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының квадраттарының айырымы 1-ге тең болатын түзудің теңдеуін жазыңдар.

28. Шеңбердің теңдеуі

Радиусы R және центрі $C(a;\ b)$ нүктесі болатын шеңбер берілсін (129-сурет). Сонда оның кез келген $M(x;\ y)$ нүктесінің координаталары $CM = R$ шартын қанағаттандыруы керек. C және M нүктелерінің арақашықтығын есептеу формуласын қолданып: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$

немесе $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (1) теңдігін аламыз.

Координаталары осы теңдеуді қанағаттандыратын кез келген нүкте шеңбердің бойында жатады, себебі шеңбердің центрінен осы нүктеге дейінгі арақашықтық R-ге тең. Олай болса, (1) теңдеу центрі $(a;\ b)$ нүктесі және радиусы R болатын шеңбердің теңдеуі. Егер шеңбердің центрі координаталар басында жатса, онда теңдеуі:



129-сурет

$$x^2+y^2=R^2 \text{ болады.}$$

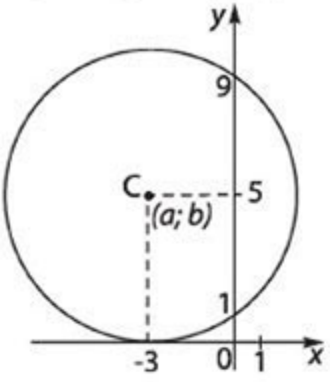
1 - е с е п. $x^2+6x+y^2-10y+9=0$ шеңбердің теңдеуі екенін дәлелдеп, оның координата осьтерімен қиылысу нүктелерін табу керек.

Ш е ш у і. Берілген теңдеуді мына түрде жазып аламыз:

$(x^2+6x+9)+(y^2-10y+25)-25=0,$

$(x+3)^2+(y-5)^2=25.$

Бұл центрі $C(-3;\ 5)$ нүктесі және радиусы 5-ке тең болатын шеңбердің теңдеуі (130-сурет). Шеңбердің C центрінен Ox осіне дейінгі арақашықтық радиусқа тең болғандықтан, шеңбер абсциссалар осімен $(-3;\ 0)$ нүктесінде жанасады. C центрінен Oy осіне дейінгі қашықтық радиустан кіші болғандықтан, шеңбер Oy осін екі нүктеде қияды. Бұл осьтің теңдеуі $x = 0$ болады. x-тің мәнін теңдеуге қойып: $9+(y-5)^2=25$ аламыз. Бұл теңдеуден:

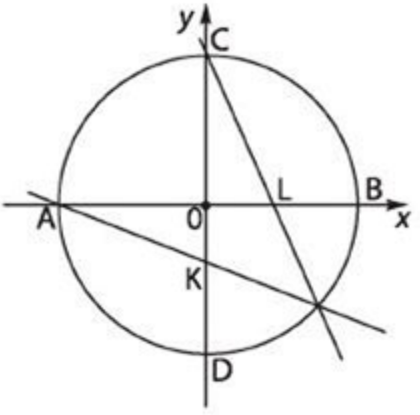


130-сурет

$(y-5)^2=16$, $y-5=4$ немесе $y-5=-4$ шығады, бұдан $y=9$ немесе $y=1$ болады. Сонымен, шеңбер Oy осімен $(0; 1)$ және $(0; 9)$ нүктелерінде қиылысады екен.

Ж а у а б ы. Радиусы 5, центрі $(-3; 5)$ нүктесі болатын шеңбер Ox осін $(-3; 0)$ нүктесінде жанайды және Oy осімен $(0; 1)$ және $(0; 9)$ нүктелерінде қиылысады.

2 - е с е п. Бірлік шеңберге өзара перпендикуляр AB және CD екі диаметрі жүргізілген. CD диаметріне $\frac{CK}{KD}=\frac{2}{1}$ шартын қанағаттандыратын K нүктесі, AB диаметріне $\frac{AL}{LB}=\frac{3}{1}$ шартын қанағаттандыратын L нүктесі белгіленген. AK және CL түзулері шеңберде жататын нүктеде қиылысатынын дәлелдеу керек.



131-сурет

Д ә л е л д е у і. Координаталар жүйесіне қиылысу нүктесі O координата басы болатын AB және CD диаметрлерін саламыз (131-сурет). Шеңбердің радиусы 1-ге тең болғандықтан, нүктелердің координаталары: $A(-1; 0)$, $C(0; 1)$, $K\left(0; -\frac{1}{3}\right)$, $L\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ болады. Сонда AK түзуі $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ теңдеуімен, ал CL түзуі $y=-2x+1$ теңдеуімен беріледі (өздігінен тексеріңдер). Осы түзулердің ортақ нүктесін табайық: $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=-2x+1$, $\frac{5}{3}x=\frac{4}{3}$, $x=\frac{4}{5}$;

$y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}$. $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ нүктесі $x^2 + y^2 = 1$ шеңберіне тиісті ме, тексеріп көрейік: $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Дұрыс теңдік алдық, $\frac{16+9}{25} = 1$, яғни AK және CL түзулерінің қиылысу нүктесі $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ берілген шеңберге тиісті болады екен.

СҰРАҚТАР

Шеңбердің теңдеуін қорытып шығарыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

297. Шеңбердің берілген теңдеуі бойынша оның центрінің координаталары мен радиусын табыңдар:
а) $(x+2)^2 + y^2 = 9$; ә) $x^2 + (y-4)^2 = 8$; б) $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 16$.

298. Егер: а) $C(4; 8)$, $R = 2$; ә) $C(-1; 2)$, $R = 4$; б) $C(3; -5)$, $R = 3$ болса, C нүктесі – центрі, R – радиусы болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

299. а) $(0; 10)$; ә) $\left(1\frac{11}{13}; \frac{10}{13}\right)$; б) $(-1,5; 3,6)$ нүктесі арқылы өтетін, центрі координаталар басы болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

300. а) $x^2 + y^2 = -9$; ә) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 7$; в) $(x-2)^2 + y = 16$; г) $x^2 + y^2 - 2(x+y) = 2$ теңдеулерінің қайсысы шеңбердің теңдеуі болады?

В деңгейі

301. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ шеңбері берілген. а) Центрі $(3; -5)$ нүктесі болатын, ал радиусы берілген шеңбердің радиусына тең; ә) берілген шеңберге ордината осіне қарағанда симметриялы болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

302. а) Центрі $C(4; -3)$ нүктесі болатын, $A(8; -6)$ нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

ә) Оқушы кез келген шеңбердің теңдеуін қорытып шығарудың келесі жолын ұсынды: «Кез келген $P(x; y)$ нүктесінен координаталар басына дейінгі қашықтық $x^2 + y^2 = R^2$ формуласымен өрнектеледі. Осы теңдік шеңбердің теңдеуі болады». Шеңбердің теңдеуін «қорытып шығарудағы» қатені табыңдар.

303. а) Центрі $(-3; 2)$ нүктесі болатын Ox осімен жанасатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

ә) $x = 3$ түзуі мен $x^2 + y^2 = 16$ шеңберінің неше ортақ нүктесі бар?

304. Диаметрі AB болатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар:

а) $A(1; 8)$, $B(5; 2)$. Осы шеңбер координата осьтерімен қиылыса ма?

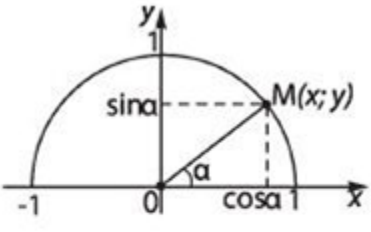
ә) $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$. Осы шеңбердің $x = -0{,}5$ түзуімен қиылысу нүктелерінің координаталарын анықтаңдар.

С деңгейі

305. Төбелері: а) $A(0; 16)$, $B(12; 0)$, $C(0; 0)$ нүктелері болатын ABC тікбұрышты үшбұрышына; ә) $N(-3\sqrt{3}; 0)$, $M(0; 9)$, $K(3\sqrt{3}; 0)$ нүктелері болатын NMK теңқабырғалы үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

29. Координаталарды 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларын есептеуде қолдану

Бірінші және екінші координаталық бұрышта орналасатын, центрі координаталар басы болатын, радиусы 1-ге тең жартышеңбер мен тікбұрышты координаталар жүйесін салайық (132-сурет). Бұны бірлік жартышеңбер деп атап, *Ox* сәулесінен бастап осы жартышеңберде жататын α бұрышын салайық.



132-сурет

Егер *OM* сәулесі *Ox* сәулесімен беттесетін болса, онда $\alpha = 0°$ деп есептейміз. *M* нүктесінің координаталарының абсциссасын x, ординатасын y арқылы белгілейміз. Сонда сүйір бұрыштың $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ және $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндері бар болса, *M* нүктесінің координаталары арқылы былай өрнектеледі:

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Егер α бұрышы тік, доғал, 0° немесе жазыңқы болса, онда $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ мәндері бар болатын болса, оларды да осы формулалар арқылы анықтаймыз.

Демек, *α бұрышының синусы* деп, мұндағы $0° \le \alpha \le 180°$, бірлік жартышеңбердің *M* нүктесінің y ординатасын, ал *α бұрышының косинусы* деп *M* нүктесінің x абсциссасын, *α бұрышының тангенсі* деп $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ қатынасын, *α бұрышының котангенсі* деп $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ қатынасын айтады. Сонда мынадай кесте шығады:

$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$	$\operatorname{tg} 0° = 0$	$\operatorname{ctg} 0°$ мәні жоқ
$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	$\operatorname{tg} 90°$ мәні жоқ	$\operatorname{ctg} 90° = 0$
$\sin 180° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\operatorname{tg} 180° = 0$	$\operatorname{ctg} 180°$ мәні жоқ

Бірлік жартышеңберде (x; y) нүктесінің координаталары $0 \le y \le 1$, $-1 \le x \le 1$ аралығында жатқандықтан, $\mathbf{0 \le \sin\alpha \le 1}$, $\mathbf{-1 \le \cos\alpha \le 1}$ болады.

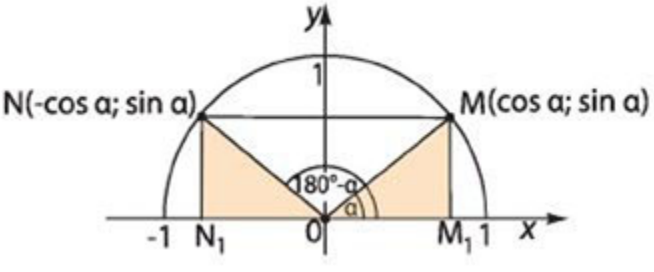
132-суретті пайдаланып, $0° \le \alpha \le 180°$ аралығынан алынған кез келген α бұрышы үшін негізгі тригонометриялық тепе-теңдігінің $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ орындалатынын өздігінен дәлелдеңдер. $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$, α – сүйір, доғал бұрыш болатын барлық жағдайларды қарастырыңдар.

Доғал бұрыштардың тригонометриялық функцияларының мәндерін есептеу үшін олардың сүйір бұрыштарының мәндерін пайдаланып, мына формулалармен есептеуге болады:

$\mathbf{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}$, $\mathbf{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha}$, $\mathbf{tg(180° - \alpha) = -tg\,\alpha}$, $\mathbf{ctg(180° - \alpha) = -ctg\,\alpha}$, мұндағы α – сүйір бұрыш.

Оларды 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың тригонометриялық функцияларының анықтамаларын пайдаланып және кейбір тікбұрышты үшбұрыштарды қарастыру арқылы дәлелдеуге болады.

Мысалы, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ формулалары OMM_1 және ONN_1 үшбұрыштарының теңдігінен шығады (133-сурет).



133-сурет

Осы формулаларды пайдалануға бірнеше мысалдар келтірейік.

1 - м ы с а л. а) $\sin 150°$; ә) $tg\,135°$ есептеу керек.

Ш е ш у і. а) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$.

ә) $tg\,135° = tg\,(180° - 45°) = -tg\,45° = -1$.

2 - м ы с а л. $\dfrac{\cos 80° \cdot \sin 80°}{\sin 10° \cdot \cos 10°}$ өрнегін ықшамдау керек.

Ш е ш у і. $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$, $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$. Яғни, $\frac{\cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = 1$.

СҰРАҚТАР

1. 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін қалай анықтайды?

2. 0°-тан 180°-қа дейінгі бұрыштардың әрбір мәніне оның: а) синусының; ә) косинусының тек бір ғана мәні сәйкес келетінін дәлелдеңдер. Кері тұжырым дұрыс па?

3. Бұрыш өскен сайын оның синусының мәні өседі, ал косинусының мәні кемиді деген дұрыс па?

4. Қандай тригонометриялық тепе-теңдіктерді білесіңдер? Олардың қайсысы негізгі тригонометриялық тепе-теңдік деп аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

306. Есептеңдер: а) $\sin 90^\circ + 2\cos 90^\circ - \sin 0^\circ$;
ә) $\cos 0^\circ - 0{,}5\sin 90^\circ + 2\sin 180^\circ$.

307. Өрнекті ықшамдаңдар:
а) $a^2 \cdot \cos 0^\circ - 2ab \cdot \sin 90^\circ + b^2 \cdot \mathrm{tg}^2\, 45^\circ$;
ә) $a^2 \cdot \sin 180^\circ + 2ab \cdot \cos 90^\circ + b^2 \cdot \mathrm{tg}\, 45^\circ$.

308. а) $\alpha = 60^\circ$ болса, $\cos\alpha + \cos 3\alpha$; ә) $\alpha = 180^\circ$ болса, $\sin\frac{\alpha}{6} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$ өрнегінің мәнін табыңдар.

В деңгейі

309. а) $\sin A = \frac{2}{3}$; ә) $\cos A = \frac{3}{4}$; б) $\cos A = -0{,}4$ болса, A бұрышын салыңдар.

310. $\alpha = 100^\circ$ болғанда: а) $\sqrt{\sin\alpha}$; ә) $\sqrt{\cos\alpha}$ өрнегінің мағынасы бола ма?

311. Берілген бұрыштардың синусын, косинусын, тангенсін және котангенсін тауып, кестені толтырыңдар: а) 120°; ә) 135°; б) 150°.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α									
cos α									
tg α									
ctg α									

312. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары мәндерінің кестесі мен тригонометриялық формулаларын пайдаланып: а) sin 160°; ә) cos 130°; б) tg 140° табыңдар.

313. Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары мәндерінің кестесі мен тригонометриялық формулаларын пайдаланып: а) $\sin\alpha \approx 0{,}2$; ә) $\cos\alpha \approx -0{,}60$; б) $\operatorname{tg}\alpha \approx -0{,}40$; в) $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}70$ болатын α бұрышын табыңдар.

314. а) $\cos\alpha = 0{,}5$; ә) $\cos\alpha = -1$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ болса, sin α-ны табыңдар, мұндағы $0° \le \alpha \le 180°$.

315. а) $\sin\alpha = 0$; ә) $\sin\alpha = 0{,}5$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болса, cos α-ны табыңдар, мұндағы $0° \le \alpha \le 180°$.

316. а) $\cos\alpha = 1$; ә) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = 0{,}6$ және $90° < \alpha < 180°$ болса, tg α-ны табыңдар.

С деңгейі

317. Бір бұрышының тангенсі $\frac{\sqrt{3}}{3}$, екінші бұрышының синусы $\frac{\sqrt{2}}{2}$ болатын үшбұрыштың үшінші бұрышын табыңдар.

318. Үшбұрыштың бір бұрышы 30°, екінші бұрышы 40°. Үшінші бұрышының синусын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

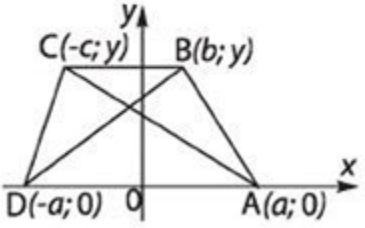
319. Теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларының арасындағы бұрышы 30°. Оның табанындағы бұрышының сыртқы бұрышының косинусын 0,01-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

320. а) Егер параллелограмның сүйір бұрышының синусы 0,6 болса, оның доғал бұрышының тангенсін табыңдар. ә) Сыбайлас бұрыштардың бірінің косинусы –0,6-ға тең. Екінші бұрышының синусын табыңдар.

30. «Жазықтықтағы тікбұрышты координаталар жүйесі» тақырыбына есептер

1-есеп. Трапецияның диагональдары квадраттарының қосындысы бүйір қабырғаларының квадраттарының қосындысына табандарының екі еселенген көбейтіндісін қосқанға тең болатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ трапециясы берілсін. Трапецияның AD табаны абсциссалар осінде, ал координаталар басы AD табанының ортасы болатындай етіп координаталық жазықтық саламыз (134-сурет). Сонда трапеция төбелерінің координаталары: $A(a; 0)$, $B(b; y)$, $C(-c; y)$, $D(-a; 0)$ болады, мұндағы $a > 0$, $a > b$, $c > 0$.



134-сурет

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$ болатынын дәлелдейік. Екі нүктенің арақашықтығы формуласын пайдаланып:

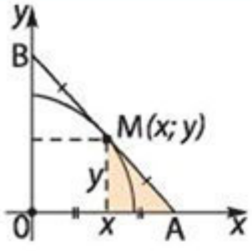
$AC^2 + BD^2 = (a + c)^2 + y^2 + (b + a)^2 + y^2 = a^2 + 2ac + c^2 + 2y^2 + b^2 + 2ab + a^2 = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 + 2a(b + c)$.

$AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = (a - b)^2 + y^2 + (a - c)^2 + y^2 + 2 \cdot 2a \cdot (b + c) = a^2 - 2ab + b^2 + 2y^2 + a^2 - 2ac + c^2 + 4a \cdot (b + c) = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 - 2a(b + c) + 4a \cdot (b + c) = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 + 2a(b + c)$ аламыз. Бұл теңдік B мен C нүктелерінің тұрған орнына байланысты емес.

$AB = DC$, $AD = BC$ болған жағдайда, яғни $ABCD$ төртбұрышы параллелограмм болса да, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ (параллелограмның диагональдары квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының квадраттарының қосындысына тең) теңдігін аламыз.

2-есеп. Ұзындығы a-ға тең AB кесіндісінің ұштары берілген тік бұрыштың қабырғаларымен жылжиды. Кесіндінің ортасы қандай сызық сызады?

Ш е ш у і. Тік бұрыштың төбесі координаталар басында, ал оның қабырғалары координаталар осьтерінде жататындай координаталық жазықтық аламыз (135-сурет).



135-сурет

1-әдіс. Егер $M(x; y)$ нүктесі AB кесіндісінің ортасы болса, онда оның координаталары:

$x = \frac{a}{2}\cos A, y = \frac{a}{2}\sin A$ болады. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

болғандықтан, $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\cos A\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin A\right)^2 = \frac{a^2}{4}(\cos^2 A + \sin^2 A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ болады.

$M(x; y)$ нүктесі $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ шеңберінің I координаталық бұрыштағы доғасын сызады екен.

2-әдіс. Егер $M(x; y)$ нүктесі AB кесіндісінің ортасы болса, онда кесінді ұштарының координаталары: $A(2x; 0)$, $B(0; 2y)$. Екі нүктенің арақашықтығының формуласынан: $AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$ аламыз. Есептің шарты бойынша $AB = a$, сондықтан $4x^2 + 4y^2 = a^2$, бұдан $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ болады. Бұл центрі координата басында, ал радиусы $\frac{a}{2}$-ге тең болатын шеңбердің теңдеуін береді, бұдан $M(x; y)$ нүктесі $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ шеңберінің бірінші ширектегі доғасына тиісті екені шығады.

Ж а у а б ы. Кесіндінің ортасы радиусы $\frac{a}{2}$ болатын, центрі берілген тік бұрыштың төбесінде жататын, бұрыш қабырғаларының арасында орналасатын шеңбер доғасын сызады.

ЖАТТЫҒУЛАР

В деңгейі

321. Координаталары $(a; 2a)$ болатын кез келген нүкте координаталар басы мен (1; 2) нүктесі арқылы өтетін түзуде жататынын дәлелдеңдер.

322. Центрі $A(-4; 0)$ нүктесі болатын және Oy осімен жанасатын шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

323. Диаметрдің ұштары болатын (–2; 3) және (2; –1) нүктелері арқылы өтетін шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

324. $A(-1; 0{,}5)$, $B(-7; 3)$, $C(-1; 5{,}5)$ болса, ΔABC-ның теңбүйірлі үшбұрыш болатынына көз жеткізіп, медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табыңдар.

325. Төбелері: а) (0; 0), $(3; 3\sqrt{3})$, (6; 0) болатын үшбұрышқа іштей сызылған; ә) (–5; –1), (–1; –5), (–1; –1) болатын үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің теңдеуін жазыңдар.

326. $O(0; 0)$, $B(a; b)$ және $C(c; d)$ нүктелері берілген. $OBCD$ параллелограмм болуы үшін D нүктесінің координаталары қандай болуы керек?

327. Центрі координаталар басында жататын бірлік жартышеңберде абсциссалары, сәйкесінше, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ болатын A, B, C нүктелері берілген. а) $\sin\angle AOC$; ә) $\operatorname{tg}\angle AOB$ табыңдар.

С деңгейі

328. $ABCD$ тіктөртбұрышының кез келген M нүктесі үшін $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

329. Тікбұрышты координаталар жүйесін пайдаланып, егер параллелограмның диагональдары тең болса, онда оның тіктөртбұрыш болатынын дәлелдеңдер.

330. Егер BM кесіндісі ABC үшбұрышының медианасы болса, онда $4BM^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

331. 1А) Мына теңдеулердің қайсысы түзудің теңдеуі болады: 1) $y = 2x$; 2) $3x - 2y = 7$; 3) $xy = 4$; 4) $x^2 + y = 9$; 5) $x = 0$; 6) $y = 5$; 7) $2x - 3xy + 4 = 0$; 8) $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} - 5 = 0$?

2А) Центрі координаталар басы болатын бірлік жартышеңберде $A(1; 0)$ және $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ нүктелері берілген. AOB бұрышының косинусын табыңдар.

3В) $A(-5; 6)$, $B(7; -4)$ нүктелері шеңбердің диаметрінің ұштары болады. Осы шеңбердің теңдеуін жазып, оның центрінен координаталар басына дейінгі қашықтықты табыңдар.

4В) Төбелері $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 2)$ және $D(2; -2)$ нүктелері болатын төртбұрыштың шаршы болатынын дәлелдеңдер.

5С) $x^2 + y^2 = 4x$ теңдеуімен берілген қисық сызықты салып, одан $A(6; -3)$ нүктесіне дейінгі ең жақын нүктені табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Координаталар идеясы ертеде пайда болған. Бастапқыда ол астрономия мен геометрияға қатысты, атап айтқанда, аспан шырақтарының, Жер бетіндегі елді мекендердің орналасуын анықтау, географиялық карталар мен күнтізбелер жасау үшін қолданылған. Птолемей бойлық пен ендікті географиялық координаталар ретінде пайдаланған.

Г. Лейбниц

Өздерің тұратын елді мекеннің бойлығы мен ендігін ғаламтордың көмегімен анықтаңдар.

Координаталар идеясы Ежелгі Мысырда кескіндемені көшіру немесе үлкейтуге мүмкіндік беретін шаршы кесте түрінде қолданылған. Тікбұрышты кестені суретшілер де қолданған. Координаталар әдісінің жалпы математикалық мәнін алғаш француз математиктері Р. Декарт (1596–1650) және П. Ферма (1601–1665) анықтаған.

П. Ферма

Координаталар әдісі Декарттың 1637 жылы жарық көрген «Геометриясында» алғаш баяндалған. «Абсцисса» және «ордината» сөздері латын тілінен шыққан. Оларды XVII ғасыр соңында неміс математигі Г. Лейбниц (1646–1717) біріктіріп, координаталар деп атаған.

8-СЫНЫПТАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

А деңгейі

332. Параллелограмның анықтамасын, қасиеттері мен белгілерін тұжырымдаңдар.

333. Тіктөртбұрыштың анықтамасын, қасиеттері мен белгілерін тұжырымдаңдар.

334. AB және CD кесінділері – шеңбердің диаметрлері. $ACBD$ төртбұрышы тіктөртбұрыш екенін дәлелдеңдер.

335. Ромбтың анықтамасын, қасиеттері мен белгілерін тұжырымдаңдар.

336. Егер: а) биіктігі 12 см, ұзын диагоналі 20 см; ә) қабырғасы 33,8 см, қысқа диагоналі 26 см болса, ромбтың ауданын табыңдар.

337. Шаршының анықтамасын, қасиеттері мен белгілерін тұжырымдаңдар.

338. Шаршының периметрінің оның диагональдарының қосындысына қатынасын табыңдар.

339. Трапецияның анықтамасын және теңбүйірлі трапецияның қасиеттерін тұжырымдаңдар.

340. а) Үлкен табаны 30 дм, бүйір қабырғасы – 10 дм, үлкен табанына іргелес бұрышы – 56°; ә) қысқа табаны 20 дм, биіктігі – 15 дм, үлкен табанына іргелес бұрышы – 34° болатын теңбүйірлі трапецияның ауданын 1 дм^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

341. Қабырғалары 5 см, 12 см және 13 см болатын үшбұрыш тікбұрышты бола ма?

342. Қабырғалары: а) 10 см, 10 см, 16 см; ә) 4 см, 13 см, 15 см болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар.

В деңгейі

343. $ABCD$ дөңес төртбұрышының A және B бұрыштарының қатынасы 7 : 8 қатынасындай, $\angle C = 150°$, ал D бұрышы $\angle B$-дан 20°-қа кем. Төртбұрыштың белгісіз бұрыштарын табыңдар.

344. $ABCD$ дөңес төртбұрышында $AB = 12$ см, $BC = CD$, $\angle C = 90°$, $\angle B = 105°$, $\angle D = 135°$. Төртбұрыштың белгісіз қабырғалары мен BD диагоналін табыңдар.

345. $ABCD$ дөңес төртбұрышының диагональдары O нүктесінде қиылысады және $CO = OA$, $\angle ABO = \angle CDO$. $ABCD$ параллелограмм екенін дәлелдеңдер.

346. Параллелограмның периметрі 16 см, бір қабырғасы екіншісінен 2 см-ге ұзын, ал бұрыштарының бірі – 150°. Параллелограмның үлкен қабырғасына жүргізілген биіктігін және ауданын табыңдар.

347. $ABCD$ тіктөртбұрышының A және D бұрыштарының биссектрисалары BC қабырғасының M нүктесінде қиылысады. $AM = 5$ см болса, тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

348. а) $ABCD$ тіктөртбұрышының диагональдарының O қиылысу нүктесінен AD қабырғасына дейінгі қашықтығы 2 см. Егер $\angle BAO = 60°$ болса, тіктөртбұрыштың ауданын табыңдар.

ә) Диагоналі d болатын қандай тіктөртбұрыштың ауданы ең үлкен болады?

349. Параллелограмның үлкен қабырғасы 5 дм, ал биіктіктері 2 дм және 2,5 дм. Параллелограмның кіші қабырғасын табыңдар.

350. а) ABC үшбұрышының AN биссектрисасы және $NM \parallel AC$, $NL \parallel AB$ кесінділері берілген ($M \in AB$, $L \in AC$). $AMNL$ төртбұрышының ромб екенін дәлелдеңдер. ә) Центрі O нүктесі болатын шеңбердің BC хордасы OA радиусының ортасы арқылы өтіп, оған перпендикуляр болады. $ABOC$ төртбұрышының ромб болатынын дәлелдеңдер.

351. $ABCD$ ромбысының AD қабырғасының орта перпендикуляры B төбесі арқылы өтеді және $BD = 8$ см. Ромбтың периметрі мен ауданын табыңдар.

352. а) CD кесіндісі – тікбұрышты ABC үшбұрышының тік бұрышының биссектрисасы, DK және DL кесінділері, сәйкесінше, AC және CB қабырғаларына түсірілген перпендикулярлар. $CKDL$ шаршы болатынын дәлелдеңдер.

ә) ABC үшбұрышында $\angle B = 90°$, $AB = BC$, BO – медиана, BO сәулесіне $OD = BO$ кесіндісі салынған. $ABCD$ шаршы болатынын дәлелдеңдер.

353. Теңбүйірлі трапецияның диагоналі бүйір қабырғасына перпендикуляр және үлкен табаны бұрышының биссектрисасында жатыр. Трапецияның бұрыштарын табыңдар.

354. Теңбүйірлі $ABCD$ трапециясының AB бүйір қабырғасы оның BC табанына тең және AD табанынан 2 есе кіші. $AC \perp CD$ екенін дәлелдеңдер.

355. Теңбүйірлі трапецияны: а) үшбұрыш; ә) тіктөртбұрыш құрауға болатындай етіп екі бөлікке бөліңдер.

356. Егер C_1, C_2, ..., C_n нүктелері AB кесіндісіне параллель болатын түзуде жататын болса, онда ABC_1, ABC_2, ..., ABC_n үшбұрыштары тең шамалас болатынын дәлелдеңдер.

357. M нүктесі $ABCD$ параллелограмының D нүктесіне оның C нүктесіне қарағанда симметриялы. Осы параллелограмның ауданы AMD үшбұрышының ауданына тең екенін дәлелдеңдер.

358. а) ABC үшбұрышының қабырғалары $AC = 20$ см, $AB = 11$ см және биіктігі $BH = 6,6$ см. CD биіктігін табыңдар. ә) AD және BH кесінділері – табаны AC болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышының биіктіктері. Егер $BH = 9$ см, $\sin A = 0,6$ болса, CD-ны табыңдар.

359. $A(-1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(4; 3)$ нүктелері берілген. ABC үшбұрышының AC қабырғасына параллель болатын орта сызығының ұзындығын табыңдар.

360. а) Төбелері $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 9)$ болатын үшбұрыштың ауданын табыңдар. ә) Тікбұрышты үшбұрыштың биіктігі оның гипотенузасын 16 см және 9 см кесінділерге бөледі. Тікбұрышты үшбұрыштың ауданын табыңдар.

361. а) Өлшеуіш рулеткасын пайдаланып, гүл егетін ромб тәріздес гүлзардың ауданын қалай өлшеуге болады? ә) Ұзындығы 4 м, ені 3,5 м, биіктігі 2,8 м бөлмеде өлшемі 0,9 м × 2 м есік пен өлшемі 1,5 м × 1,2 м терезе бар. Осы бөлменің қабырғасына жабыстыру үшін 1 бумасының өлшемі 10 м × 0,5 м болатын тұсқағаздың неше бумасы керек болады? б) Ұлы Жібек жолы өтетін Катон-Қарағай ұлттық табиғи саябағы Қазақстандағы ең ірі саябақтардың бірі болып табылады. Оның ауданы гипотенузасы $2 \cdot 10^5$ м және бұрышы $70°$ болатын тікбұрышты үшбұрыштың ауданына тең болса, саябақтың ауданын ($м^2$-мен) стандарт түрде жазылған санмен өрнектеңдер.

362. ABC үшбұрышының AC қабырғасына параллель болатын MN орта сызығы жүргізілген. $AMNC$ трапециясының ауданы берілген үшбұрыш ауданының қандай бөлігін құрайды?

363. а) Қабырғасы a-ға тең болатын теңқабырғалы үшбұрыштың ауданын табыңдар. ә) Ауданы $9\sqrt{3}$ $см^2$ болатын теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасын табыңдар.

364. Егер: а) сырттай сызылған шеңбердің радиусы 2 см; ә) іштей сызылған шеңбердің радиусы $\sqrt{3}$ см болса, теңқабырғалы үшбұрыштың ауданын табыңдар.

С деңгейі

365. ABC теңбүйірлі үшбұрышының AC табанынан $AK : KC = 1 : 2$ қатынасына тең болатын K нүктесі, ал AB және BC қабырғаларынан, сәйкесінше, $KN \parallel BC$, $KM \parallel AB$ болатындай N және M нүктелері алынған. $KNBM$ төртбұрышының периметрі 12 см. Егер $\angle B = 45°$ болса, ABC үшбұрышының бүйір қабырғасы мен ауданын табыңдар.

366. a, b екі қабырғасы мен үшінші қабырғаға жүргізілген m медианасы арқылы (циркуль мен сызғыштың көмегімен) үшбұрыш салыңдар.

367. Қабырғалары a және b болатын параллелограмның ауданы ең үлкен болуы үшін оның түрі қандай болуы керек?

368. Берілген тіктөртбұрышты бір төбеден шығатын екі сәулемен үш тең шамалас үшбұрышқа бөліңдер.

369. Циркуль мен сызғышты қолданып, a қабырғасы мен d диагоналі бойынша ромб салыңдар.

370. Радиусы 4 см шеңбер теңқабырғалы үшбұрыштың бір қабырғасы мен басқа екі қабырғасының созындыларын жанайды. Үшбұрыштың ауданын табыңдар.

371. ABC үшбұрышының ішінен ABX, BCX, ACX үшбұрыштарының аудандары тең болатындай X нүктесін белгілеңдер.

372. Теңқабырғалы үшбұрыштың ішінен алынған кез келген нүктеден оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының қосындысы осы үшбұрыштың биіктігіне тең болатынын дәлелдеңдер.

373. а) ABC үшбұрышының BD биссектрисасы AC қабырғасын $AD = m$, $DC = n$ болатын кесінділерге бөледі. Ауданды пайдаланып, $\frac{AB}{m} = \frac{BC}{n}$ болатынын дәлелдеңдер. ә) ABC үшбұрышының ауданы 75 см^2, $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ екені белгілі, BD – оның биссектрисасы. ABD үшбұрышының ауданын табыңдар.

374. Тікбұрышты үшбұрыштың екі бұрышының синустарының қосындысы 1-ге тең болуы мүмкін бе?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

375. 1А) Тікбұрышты үшбұрыштың a, b катеттерін, c гипотенузасын және гипотенузаға түсірілген h биіктігін пайдаланып, үшбұрыштың ауданын есептейтін әртүрлі екі формула жазыңдар.

2А) Тікбұрышты ABC үшбұрышының AB гипотенузасы 10 см, BC катеті 6 см, BM – оның медианасы. CBM бұрышының тангенсін табыңдар.

3В) Кез келген дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының орталарын қосатын кесінділері қиылысу нүктесінде қақ бөлінетінін дәлелдеңдер.

4В) Төбелері $A(5; -3)$, $B(-7; 6)$, $C(0; 6)$ болатын үшбұрыштың ең үлкен орта сызығының ұзындығын табыңдар.

5С) Теңбүйірлі трапеция пішіндес жер телімінің үлкен табаны 64 м, оған іргелес бұрышы 60°, бүйір қабырғасы – 14 м. Бұл жер телімінің ауданы қандай? Жауабын 0,1 арға дейінгі дәлдікпен жазыңдар.

ҚОСЫМША

Тангенстің 0°-тан 89°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі

A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Синус пен косинустың 0°-тан 90°-қа дейінгі бұрыштарының жуық мәндерінің кестесі

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

Жаттықтырғыш есептер

I. КӨПБҰРЫШТАР. ТӨРТБҰРЫШТАРДЫ ЗЕРТТЕУ

Көпбұрыш. Көпбұрыш бұрыштарының қосындысы

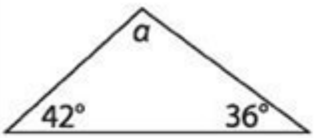
1. Кестені толтырыңдар:

N	4		6		5	
S		180°		900°		1260°

N – қабырға саны, S – бұрыштарының қосындысы.

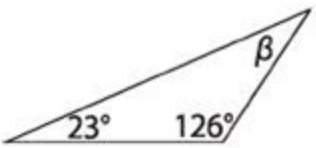
2. Бұрышты табыңдар:

а)



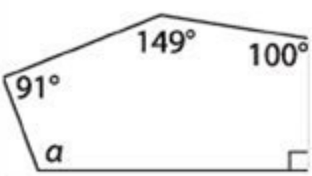
α – ?

ә)



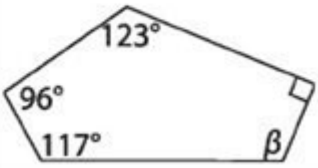
β – ?

б)



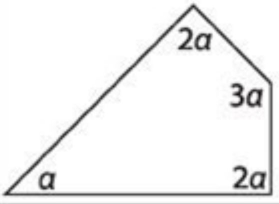
α – ?

в)



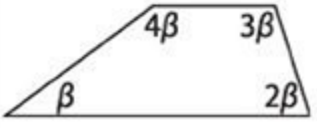
β – ?

г)



α – ?

ғ)



β – ?

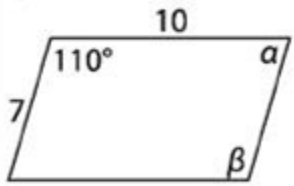
3. Төртбұрыш бұрыштарының қатынасы: а) 6 : 2 : 3 : 4; ә) 1 : 2 : 3 : 4 қатынасындай болса, оның бұрыштарын табыңдар.

4. Үш қабырғасы 5 см, 10 см, 12 см, ал периметрі: а) 80 см; ә) 45 см болатын дөңес төртбұрыш болуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.

Параллелограмм, оның белгілері мен қасиеттері

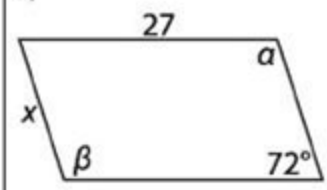
5. Параллелограмның белгісіз элементтерін табыңдар:

а)



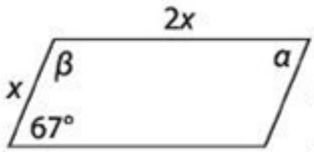
$\alpha - ?$
$\beta - ?$
$P - ?$

ә)



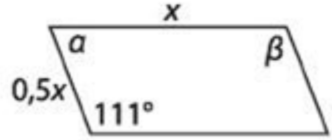
$P = 88$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$
$x - ?$

б)



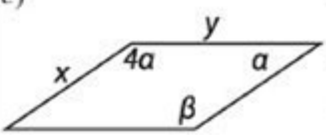
$P = 114$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$
$x - ?$

в)



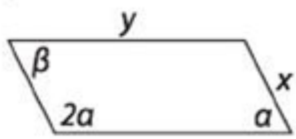
$P = 78$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$
$x - ?$

г)



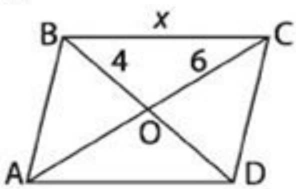
$P = 36$
$x + y - ?$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$

ғ)



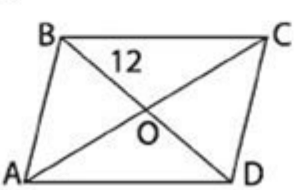
$x + y = 23$
$P - ?$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$

д)



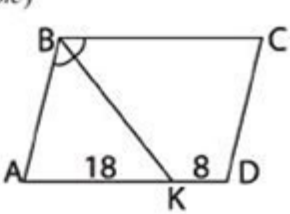
$BO = 4$
$OC = 6$
$P_{AOD} = 20$
$x - ?$

е)



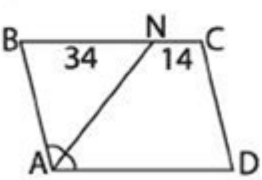
$P_{ABCD} = 78$
$BO = 12$
$P_{ABD} - ?$

ж)



$AK = 18$
$DK = 8$
$P_{ABCD} - ?$

з)



$BN = 34$
$CN = 14$
$P_{ABCD} - ?$

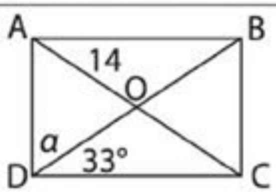
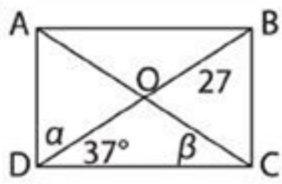
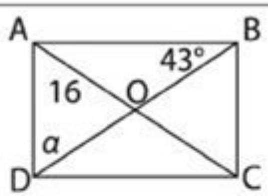
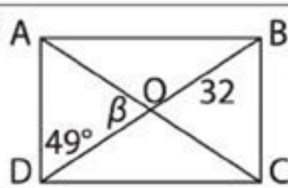
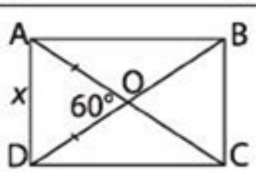
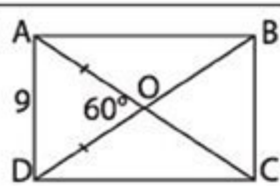
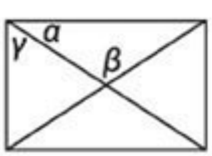
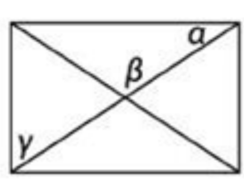
6. а) Периметрі 126 см, ал сыбайлас қабырғаларының қатынасы 0,8-ге; ә) периметрі 36 см, ал сыбайлас қабырғаларының айырымы 1 см-ге тең болатын параллелограмның қабырғаларын табыңдар.

7. $ABCD$ параллелограмының A сүйір бұрышының биссектрисасы: а) $AB = 4$ см, $AD = 11$ см болса, BC қабырғасын; ә) $AB = 7$ см, $AD = 2$ см болса, CD қабырғасын қандай кесінділерге бөледі?

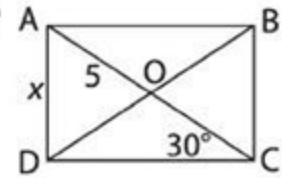
8. Егер $ABCD$ параллелограмында: а) $\angle B - \angle A = 50°$; ә) $\angle D = 3 \cdot \angle C$ болса, оның бұрыштарын табыңдар.

Тіктөртбұрыштың қасиеттері

9. Тіктөртбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)  $AO = 14$ $BO - ?$ $DO - ?$ $\alpha - ?$	*ә)*  $BO = 27$ $AO - ?$ $DB - ?$ $\alpha - ?$ $\beta - ?$
б)  $AO = 16$ $P_{ABCD} = 90$ $P_{COD} - ?$ $\alpha - ?$	*в)*  $BO = 32$ $P_{ABC} = 155$ $P_{ABCD} - ?$ $\beta - ?$
г)  $BD = 34$ $x - ?$	*ғ)*  $AC - ?$
д)  $\alpha + \beta = 145°$ $\gamma - ?$	*е)*  $\alpha + \beta = 155°$ $\gamma - ?$

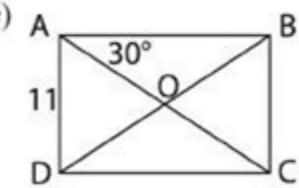
ж)



$AO = 5$

$x - ?$

з)



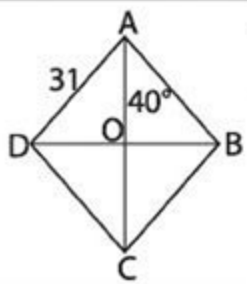
$AD = 11$

$OC - ?$

Ромбтың қасиеттері

10. Ромбтың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)

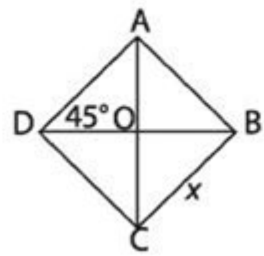


$P_{ABCD} - ?$

$\angle DAB - ?$

$\angle ABC - ?$

ә)



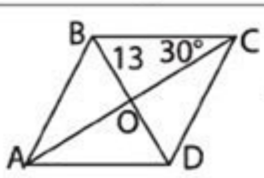
$P_{ABCD} = 44$

$\angle DAB - ?$

$\angle ADC - ?$

$x - ?$

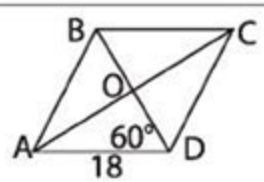
б)



$BO = 13$

$BC - ?$

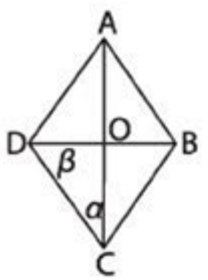
в)



$AD = 18$

$DO - ?$

г)



$OD = \frac{1}{2} DC$

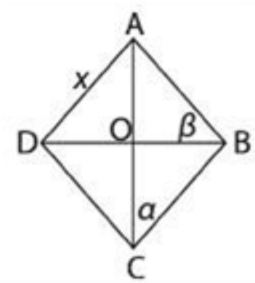
$AB = 10$

$P_{ABCD} - ?$

$\alpha - ?$

$\beta - ?$

ғ)



$BC = 2OB$

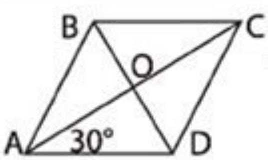
$P_{ABCD} = 56$

$x - ?$

$\alpha - ?$

$\beta - ?$

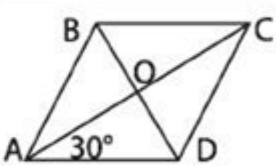
д)



$P_{ABCD} = 36$

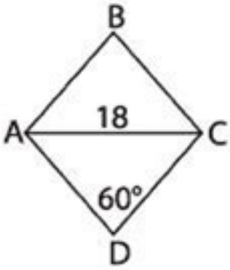
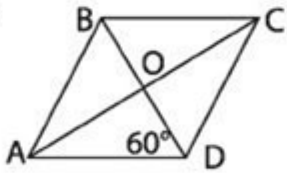
$BD - ?$

е)



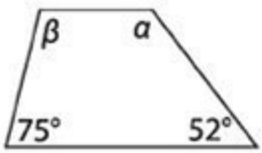
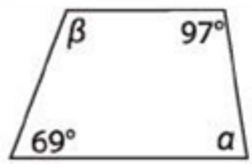
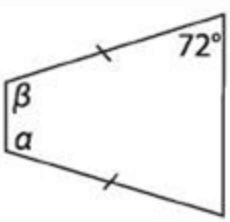
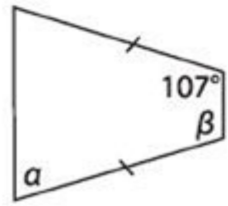
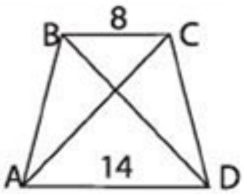
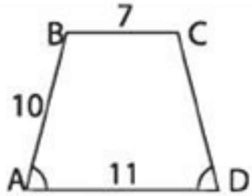
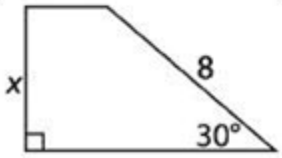
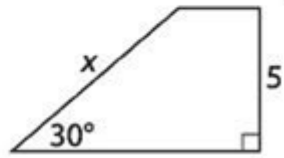
$P_{ABCD} = 84$

$BO - ?$

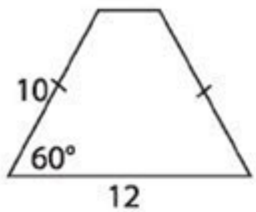
ж)  P_{ABCD} – ?	*з)*  $BD = 30$ P_{ABCD} – ?

Трапецияның қасиеттері

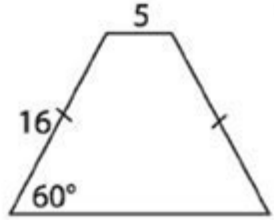
11. Трапецияның белгісіз элементтерін табыңдар:

а)  α – ? β – ?	*ә)*  α – ? β – ?
б)  α – ? β – ?	*в)*  α – ? β – ?
г)  $AC = BD$ $P_{ABCD} = 42$	*ғ)*  P_{ABCD} – ?
д)  x – ?	*е)*  x – ?

ж) P_{ABCD} – ?



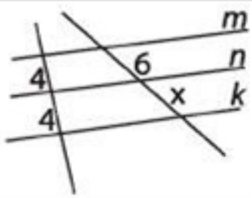
з) P_{ABCD} – ?



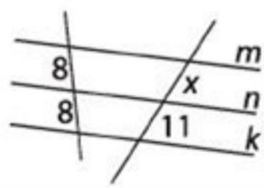
Фалес теоремасы
және пропорционал кесінділер туралы теорема

12. Белгісіз элементтерді табыңдар:

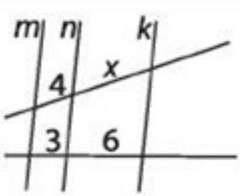
а) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



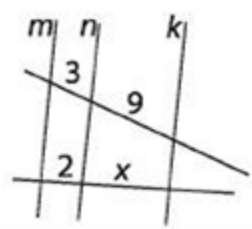
ә) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



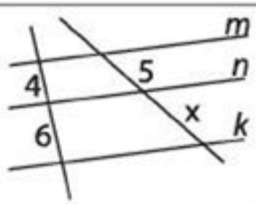
б) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



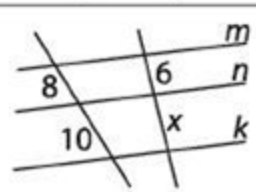
в) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



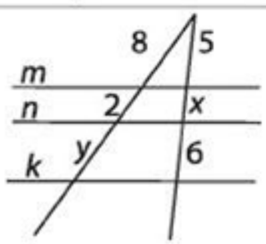
г) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



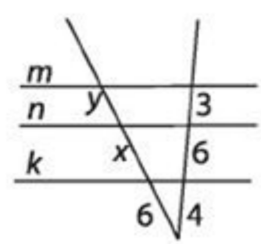
ғ) $m \parallel n \parallel k$, x – ?

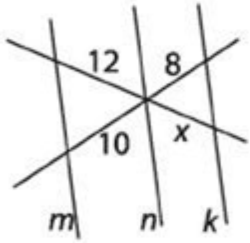
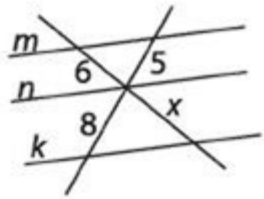


д) $m \parallel n \parallel k$, x – ?, y – ?



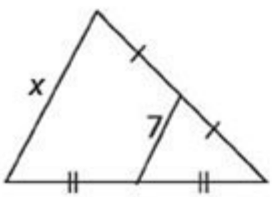
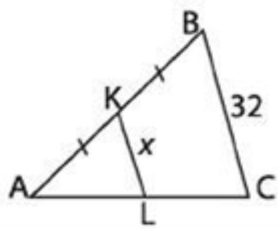
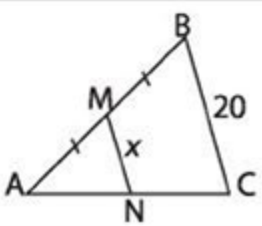
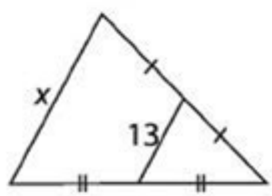
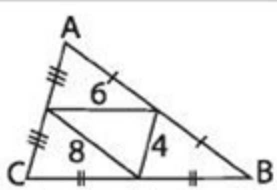
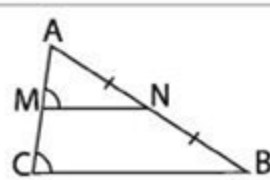
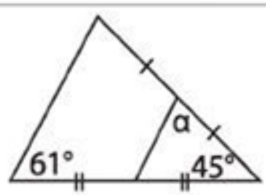
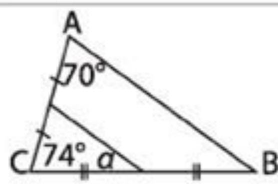
е) $m \parallel n \parallel k$, x – ?, y – ?



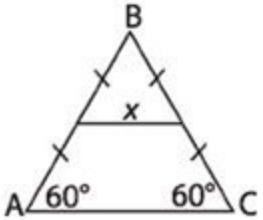
ж)  $m \parallel n \parallel k$ $x - ?$ $y - ?$	*з)*  $m \parallel n \parallel k$ $x - ?$ $y - ?$

Үшбұрыштың орта сызығы

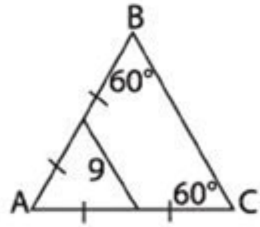
13. Үшбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)  $x - ?$	*ә)*  $KL \parallel BC$ $x - ?$
б)  $MN \parallel BC$ $x - ?$	*в)*  $x - ?$
г)  $P_{ABC} - ?$	*ғ)*  $P_{ABC} = 24$ $P_{AMN} - ?$
д)  $\alpha - ?$	*е)*  $\alpha - ?$

ж) $P_{ABC} = 36$, $x - ?$



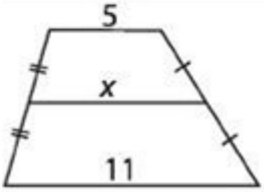
з) $P_{ABC} - ?$



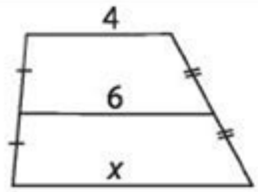
Трапецияның орта сызығы

14. Трапецияның белгісіз элементтерін табыңдар:

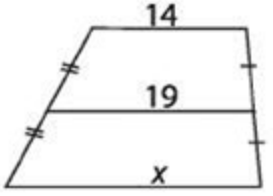
а) $x - ?$



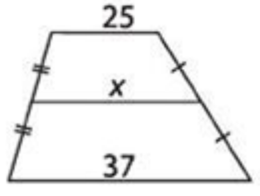
ә) $x - ?$



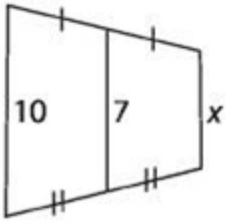
б) $x - ?$



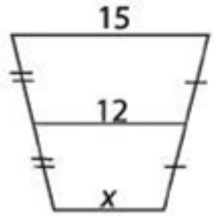
в) $x - ?$



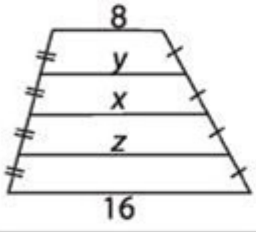
г) $x - ?$



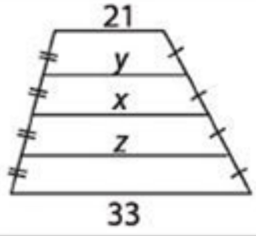
ғ) $x - ?$

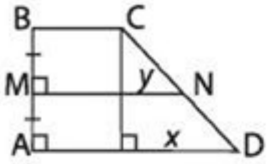
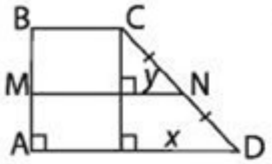


д) $x - ?$, $y - ?$, $z - ?$



е) $x - ?$, $y - ?$, $z - ?$



ж)  $AD = 40$ $MN = 32$ $x - ?$ $y - ?$	з)  $AD = 20$ $MN = 15$ $x - ?$ $y - ?$

Дұрыс жауаптарды табыңдар (15–21).

15. Егер параллелограмның екі бұрышының қосындысы 94°-қа тең болса, онда оның доғал бұрышы:

а) 200°; ә) 166°; б) 133°; в) 100°; г) 89°.

16. Егер параллелограмның екі бұрышының айырымы 100° болса, онда оның кіші бұрышы:

а) 50°; ә) 40°; б) 30°; в) 45°; г) 35°.

17. *ABCD* параллелограмының *B* төбесінен *AD* және *CD* қабырғаларына, сәйкесінше, *BH* және *BK* перпендикулярлары жүргізілген. *HBK* бұрышы 64°-қа тең. Параллелограмның бұрыштарын табыңдар.

а) 26°, 154°, 26°, 154°; в) 58°, 122°, 58°, 122°;
ә) 52°, 128°, 52°, 128°; г) 64°, 116°, 64°, 116°.
б) 56°, 124°, 56°, 124°;

18. Ромбтың доғал бұрышы сүйір бұрышынан 5 есе артық. Ромбтың қабырғасы биіктігінен неше есе артық?

а) 1,5 есе; ә) 2 есе; б) 2,5 есе; в) 4 есе; г) 5 есе.

19. *ABCD* параллелограмының *A* бұрышынан жүргізілген биссектриса *BC* түзуін *K* нүктесінде қияды. Егер *AB* = 5 см және *AD* = 12 см болса, *BK* және *KC* кесінділерін табыңдар.

а) 3 см және 2 см; в) 12 см және 7 см;
ә) 4 см және 1 см; г) 17 см және 7 см.
б) 5 см және 7 см;

20. Трапецияның табандары ұзындықтарының қатынасы 7 : 3 қатынасындай, ал олардың айырымы 3,2 см-ге тең. Трапецияның орта сызығының ұзындығын табыңдар.

а) 1,2 см; ә) 2,8 см; б) 3,2 см; в) 4 см; г) 8 см.

21. $ABCD$ тікбұрышты трапециясы берілген, оның $\angle D = 90°$, $\angle ABD = \angle DBC = 60°$, $CD = b$, $BD = a$. Трапецияның периметрін табыңдар.

а) $b + 4a$; в) $2(b + a)$;
ә) $b + 2{,}5a$; г) $3b + 0{,}5a$.
б) $1{,}5b + 2a$;

Бос орындарды толтырыңдар (22–28).

22. Егер шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлерінің ұштарын тізбектей қосса, онда пайда болған төртбұрыш ... болады.

23. Егер ромбтың доғал бұрышы 120°-қа тең, ал қабырғасы 6 см болса, онда кіші диагоналі ... см-ге тең болады.

24. Егер тіктөртбұрыштың диагоналі оның бір қабырғасынан 2 есе үлкен болса, онда диагональдарының арасындағы сүйір бұрыш ... градусқа тең.

25. Егер $ABCD$ ромбысының BK биіктігі AD қабырғасын $AK = 2$ см, $KD = 2$ см кесінділеріне бөлсе, онда ромбтың бұрыштары ...°, ...°, ...°, ...°-қа тең болады.

26. Егер үшбұрыштың орта сызығы 8 см-ге тең болса, онда үшбұрыштың осы орта сызыққа параллель қабырғасы ... см-ге тең болады.

27. Егер тікбұрышты трапецияның бір бұрышы 45°-қа тең болса, онда қалған бұрыштары ...°, ...°, ...°-қа тең болады.

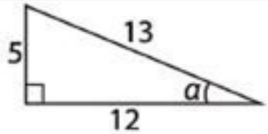
28. Үшбұрыштың тамаша нүктелерінің бірі, оның барлық төбелерінен бірдей қашықтықта болатын ... қиылысу нүктесі болады.

II. ТІКБҰРЫШТЫ ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДАҒЫ ҚАТЫСТАР

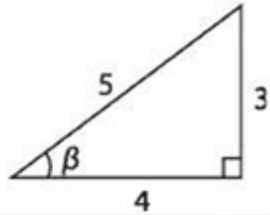
Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының косинусы. Пифагор теоремасы

29. Үшбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

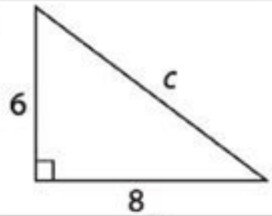
а) $\cos\alpha - ?$



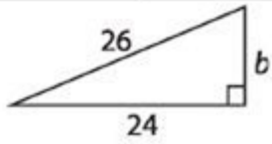
ә) $\cos\beta - ?$



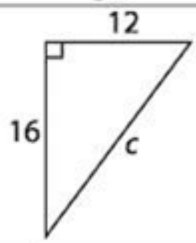
б) $c - ?$



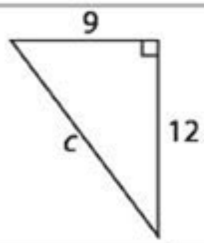
в) $b - ?$



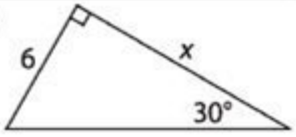
г) $c - ?$



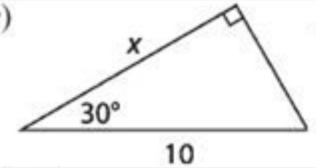
ғ) $c - ?$



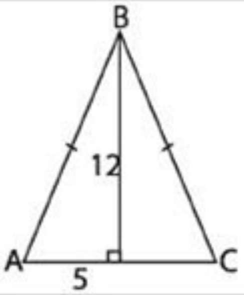
д) $x - ?$



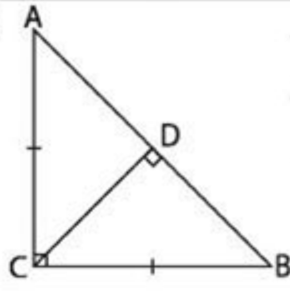
е) $x - ?$

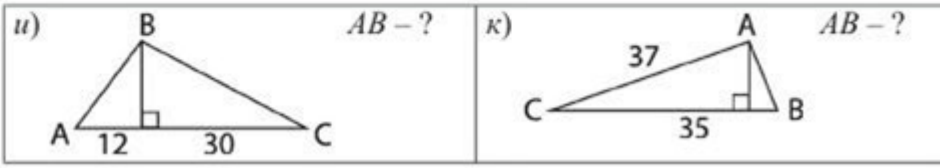


ж) $AB - ?$ $P_{ABC} - ?$



з) $AC = 5\sqrt{2}$ $AB - ?$ $CD - ?$

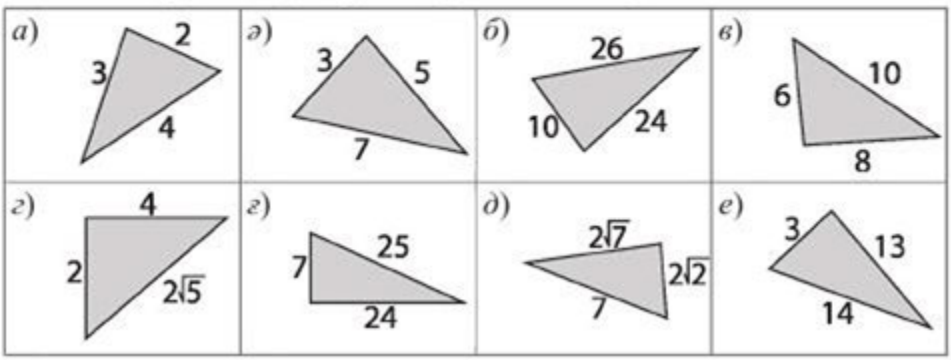




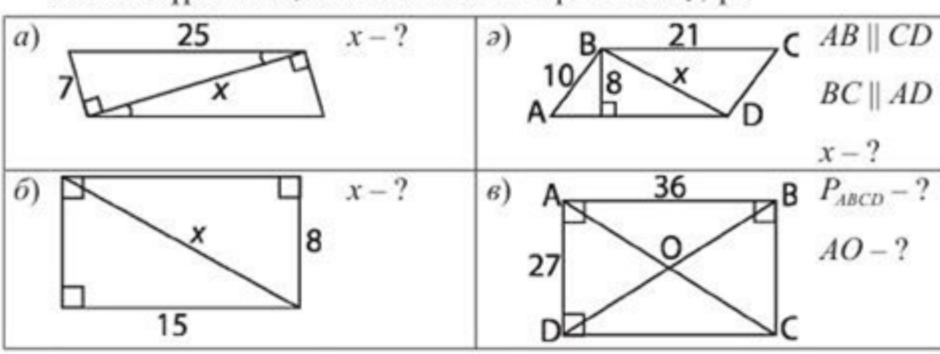
30. Кестені толтырыңдар:

катет	8		12	40		1	6	2
катет	6	17	35	42	15	$2\sqrt{6}$	$6\sqrt{3}$	
гипотенуза		15			20			$10\sqrt{2}$

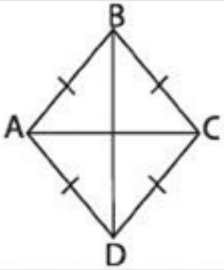
31. Тікбұрышты үшбұрыштарды таңдаңдар:



32. Көпбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:



г)



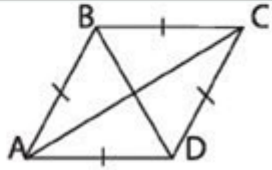
$AC = 12$

$BD = 16$

$AB - ?$

$P_{ABCD} - ?$

ғ)



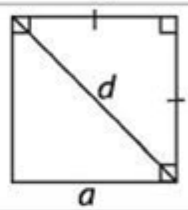
$AB = 10$

$AC = 16$

$BD - ?$

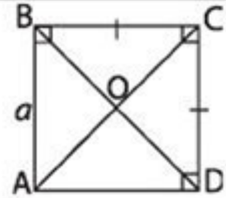
$P_{ABCD} - ?$

д)



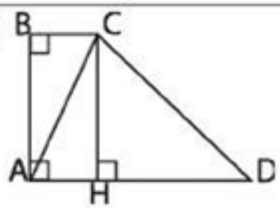
$x - ?$

е)



$x - ?$

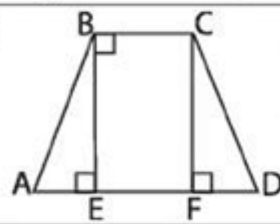
ж)



$AB - ?$

$P_{ABC} - ?$

з)



$AC = 5\sqrt{2}$

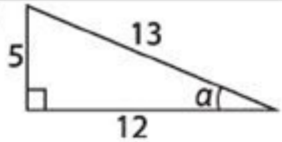
$AB - ?$

$CD - ?$

Сүйір бұрыштың тригонометриялық функциялары

33. Функциялардың мәндерін табыңдар:

а)



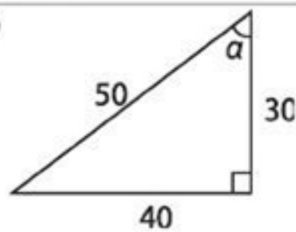
$\sin\alpha - ?$

$\cos\alpha - ?$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$

$\operatorname{ctg}\alpha - ?$

ә)



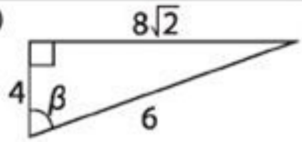
$\sin\alpha - ?$

$\cos\alpha - ?$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$

$\operatorname{ctg}\alpha - ?$

б)



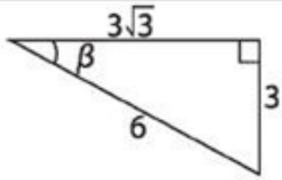
$\sin\beta - ?$

$\cos\beta - ?$

$\operatorname{tg}\beta - ?$

$\operatorname{ctg}\beta - ?$

в)



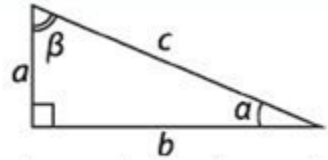
$\sin\beta - ?$

$\cos\beta - ?$

$\operatorname{tg}\beta - ?$

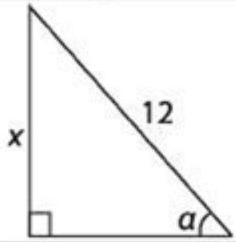
$\operatorname{ctg}\beta - ?$

34. Кестені толтырыңдар:



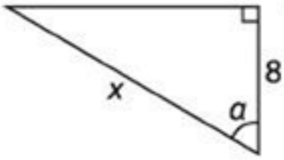
a	4	8	16		39	$2\sqrt{7}$	2		4
b	4,2		63	21	80	$6\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	
c		17		29				5	10
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

35. Үшбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)


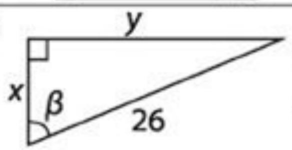
$\sin\alpha = \frac{3}{4}$

x – ?

ә)


$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

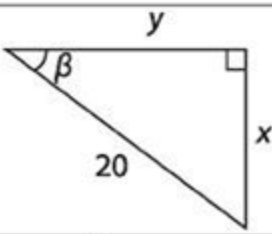
x – ?

б)


$\cos\beta = \frac{5}{13}$

x – ?

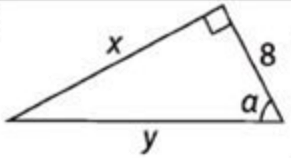
y – ?

в)


$\sin\beta = \frac{3}{5}$

x – ?

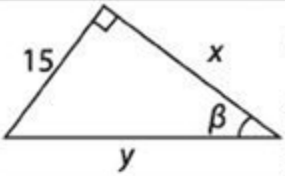
y – ?

г)


$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$

x – ?

y – ?

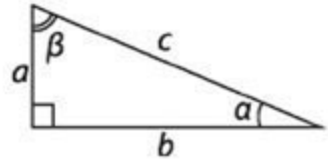
ғ)


$\operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$

x – ?

y – ?

36. Кестені толтырыңдар:



a			9	0,7		6	
b		48			$10\sqrt{2}$	12	4
c	15						
$\sin\alpha$				$\frac{7}{25}$			
$\cos\alpha$	$\frac{3}{5}$				$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		
$\operatorname{tg}\alpha$		$\frac{5}{12}$					1
$\operatorname{ctg}\alpha$			$\frac{9}{40}$				

37. Бұрыштардың тригонометриялық функция шамаларын салыстырыңдар:

а) $\sin 40°$ және $\sin 50°$;
ә) $\cos 15°$ және $\cos 70°$;
б) $\operatorname{tg} 20°$ және $\operatorname{tg} 30°$;
в) $\sin 35°$ және $\sin 20°$;
г) $\cos 65°$ және $\cos 40°$;
ғ) $\operatorname{tg} 80°$ және $\operatorname{tg} 50°$.

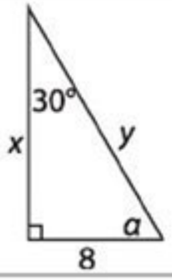
38. Тригонометриялық формулаларды пайдаланып, кестені толтырыңдар:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
	0,6		
			$\frac{40}{9}$

Тікбұрышты үшбұрышты шешу

39. Үшбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)

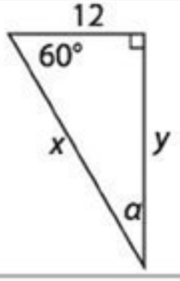


$\alpha - ?$

$x - ?$

$y - ?$

ә)

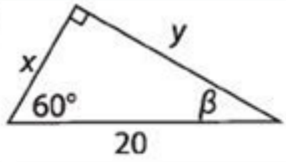


$\alpha - ?$

$x - ?$

$y - ?$

б)

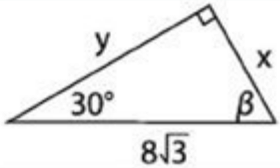


$\beta - ?$

$x - ?$

$y - ?$

в)

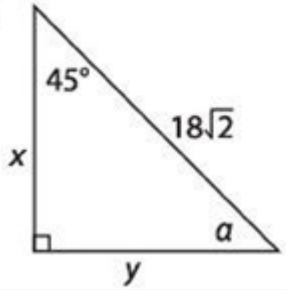


$\beta - ?$

$x - ?$

$y - ?$

г)

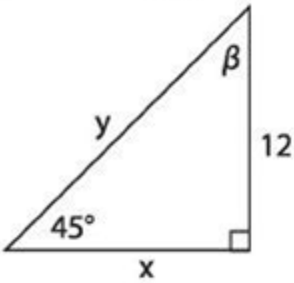


$\alpha - ?$

$x - ?$

$y - ?$

г)

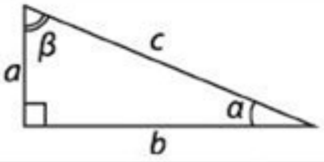


$\beta - ?$

$x - ?$

$y - ?$

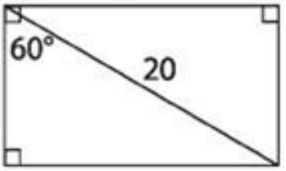
40. Кестені толтырыңдар:



a		3		30		$17\sqrt{3}$
b			8		$4\sqrt{2}$	
c	2			60	8	34
α	45°		60°			
β		30°				

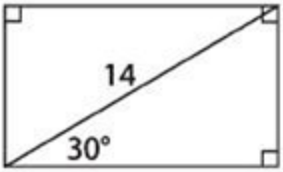
41. Көпбұрыштың белгісіз элементтерін табыңдар:

а)



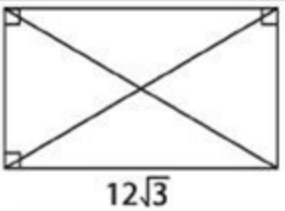
$S - ?$

ә)



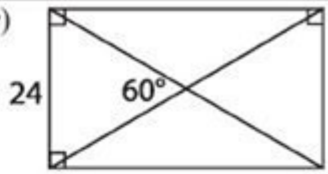
$S - ?$

б)

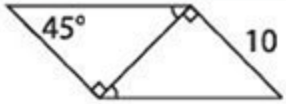
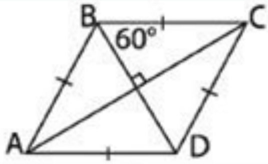
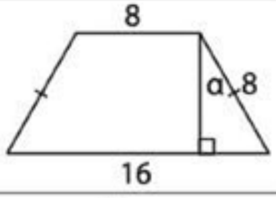
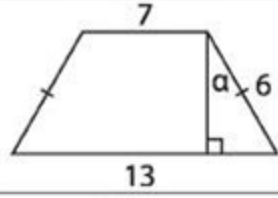
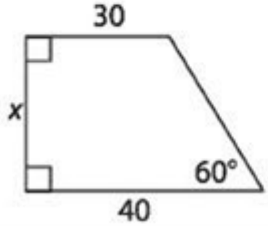
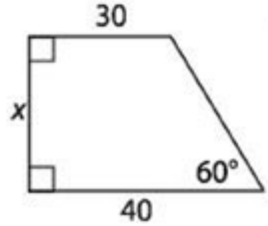


$P - ?$

в)



$P - ?$

г)  P – ?	*г)*  $AB = 40$ AC – ?
д)  α – ?	*е)*  α – ?
ж)  x – ?	*з)*  x – ?

Дұрыс жауабын табыңдар немесе өз жауаптарыңды жазыңдар (42–47).

42. BC – центрі O шеңберінің жанамасы (B – жанасу нүктесі). Егер $BC = 8$ см, ал шеңбердің диаметрі 12 см болса, CO-ны табыңдар.

а) 8 см; ә) 10 см; б) 12 см; в) 15 см; г) басқа жауап.

43. $ABCD$ ромбысының B доғал бұрышы 120°-қа және AB қабырғасы 6-ға тең. Ромбтың диагональдарын табыңдар.

а) 6 және $6\sqrt{3}$; б) 3 және $6\sqrt{3}$; г) басқа жауап.

ә) 6 және $3\sqrt{3}$; в) 6 және $12\sqrt{3}$;

44. Қабырғалары: а) 4 см, 5 см, 6 см; ә) 6 см, 7 см, 8 см; б) 6 см, 8 см, 10 см; в) 7 см, 8 см, 9 см; г) 8 см, 11 см, 15 см болатын үшбұрыштардың қайсысы тікбұрышты болады?

45. ABC тікбұрышты үшбұрышында ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, BM – медиана. CBM бұрышының синусын табыңдар.

а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{13}}{13}$; б) $\frac{\sqrt{52}}{4}$; в) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; г) басқа жауап.

46. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 3 және 4-ке тең. Тік бұрышынан жүргізілген биіктік гипотенузаны қандай кесінділерге бөледі?

а) $\frac{4}{5}$ және $\frac{21}{5}$; б) $\frac{9}{5}$ және $\frac{16}{5}$; г) басқа жауап.

ә) $\frac{15}{8}$ және $\frac{25}{8}$; в) 2 және 3;

47. Теңдіктердің қайсысы тепе-теңдік болатынын көрсетіңдер:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; в) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}$;

ә) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}$; г) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

б) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

Бос орындарды толтырыңдар (48–54).

48. Теңқабырғалы үшбұрыштың BM және AN медианалары O нүктесінде қиылысады. Егер $AB = 12$ см болса, онда BO және ON, сәйкесінше, ... тең.

49. Егер ромбтың қабырғасы – a, ал оның диагоналі – $a\sqrt{2}$ болса, оның бұрыштары ... градус болады.

50. Егер тікбұрышты үшбұрыштың биіктігі гипотенузаны 2 см және 8 см кесінділерге бөлсе, онда ол биіктік ... см-ге тең болады.

51. Егер теңбүйірлі ABC үшбұрышының B төбесіндегі бұрышы 120°-қа тең, ал биіктігі $CD = 3$ см болса, онда AB бүйір қабырғасы ... см-ге тең болады.

52. Бұрыштың косинусы белгілі болса, (негізгі тригонометриялық тепе-теңдік арқылы) оның синусын былай табады: $\sin\alpha = \ldots$.

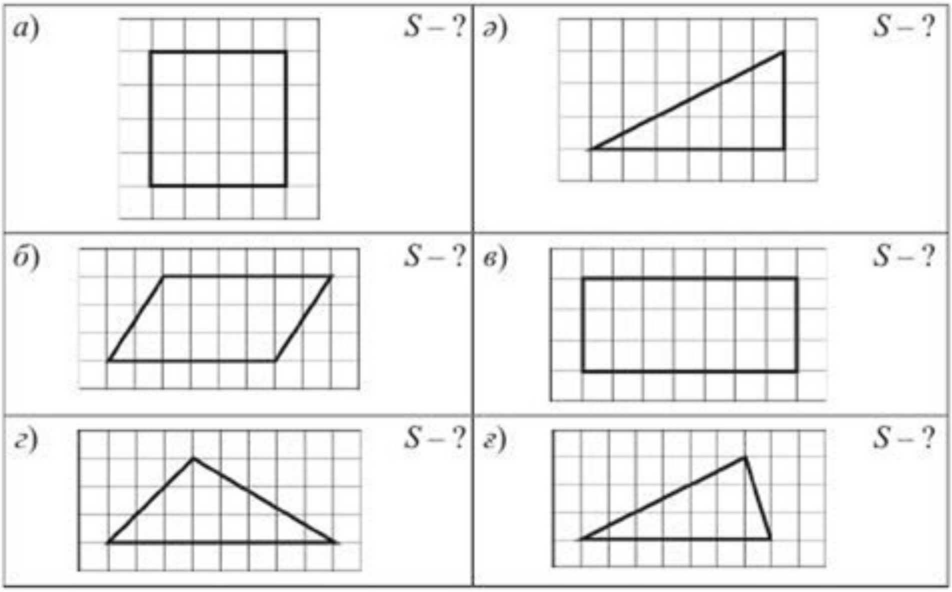
53. Бұрыштың косинусы мен тангенсі белгілі болса, оның синусын былай табады: $\sin\alpha = \ldots$.

54. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ болса, онда $\operatorname{ctg}\alpha = \ldots$, $\cos\alpha = \ldots$, $\sin\alpha = \ldots$.

III. ФИГУРАЛАРДЫҢ АУДАНДАРЫ

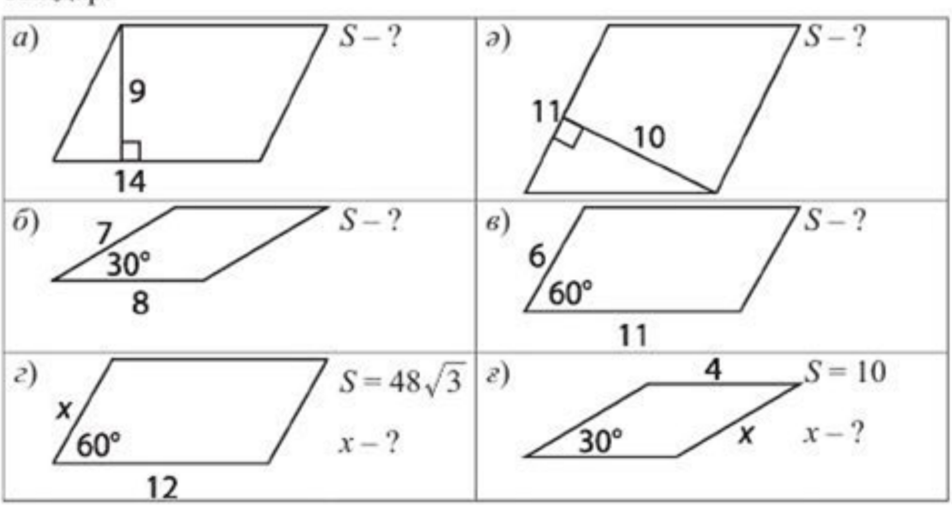
Аудан ұғымы. Тіктөртбұрыштың ауданы

55. Фигураның ауданын табыңдар (бір торкөз өлшем бірлігіне тең):

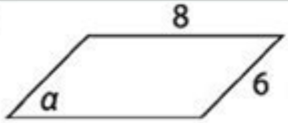


Параллелограмның ауданы

56. Параллелограмның ауданы мен белгісіз элементтерін табыңдар:



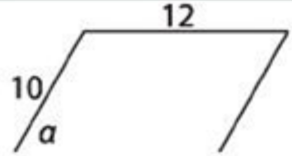
д)



$S = 24\sqrt{2}$

α – ?

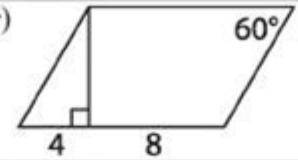
е)



$S = 60\sqrt{3}$

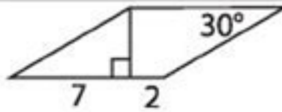
α – ?

ж)



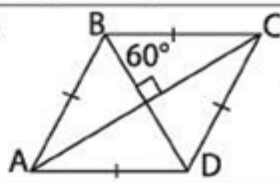
S – ?

з)



S – ?

и)

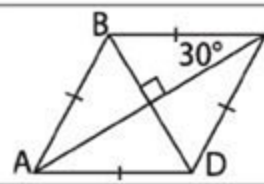


$AC = 12\sqrt{3}$

$BD = 12$

S – ?

к)



$AC = 10\sqrt{3}$

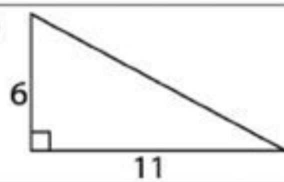
$BD = 10$

S – ?

Үшбұрыштың ауданы

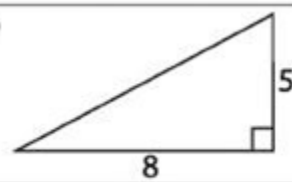
57. Үшбұрыштың ауданы мен белгісіз элементтерін табыңдар:

а)



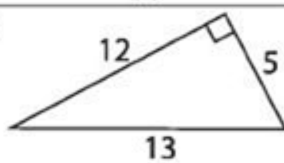
S – ?

ә)



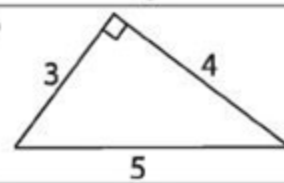
S – ?

б)



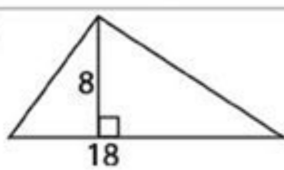
S – ?

в)



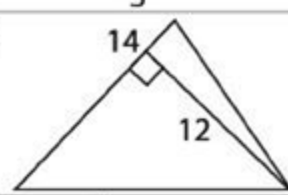
S – ?

г)



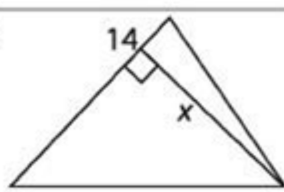
S – ?

ғ)



S – ?

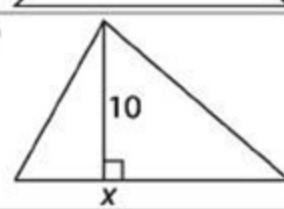
д)



$S = 84$

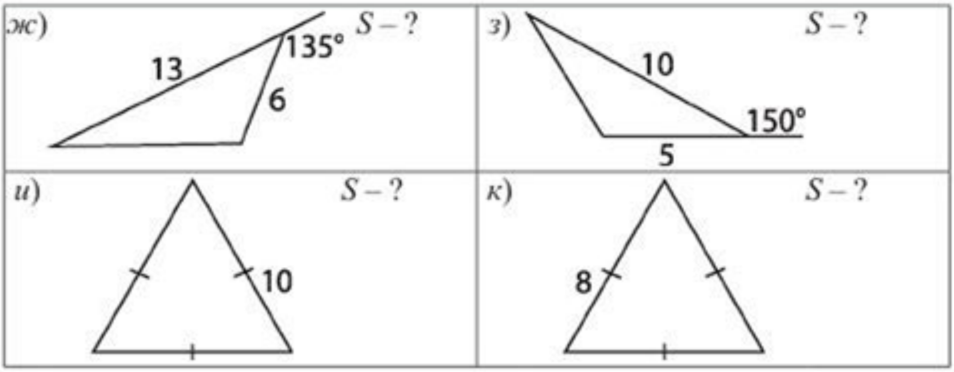
x – ?

е)



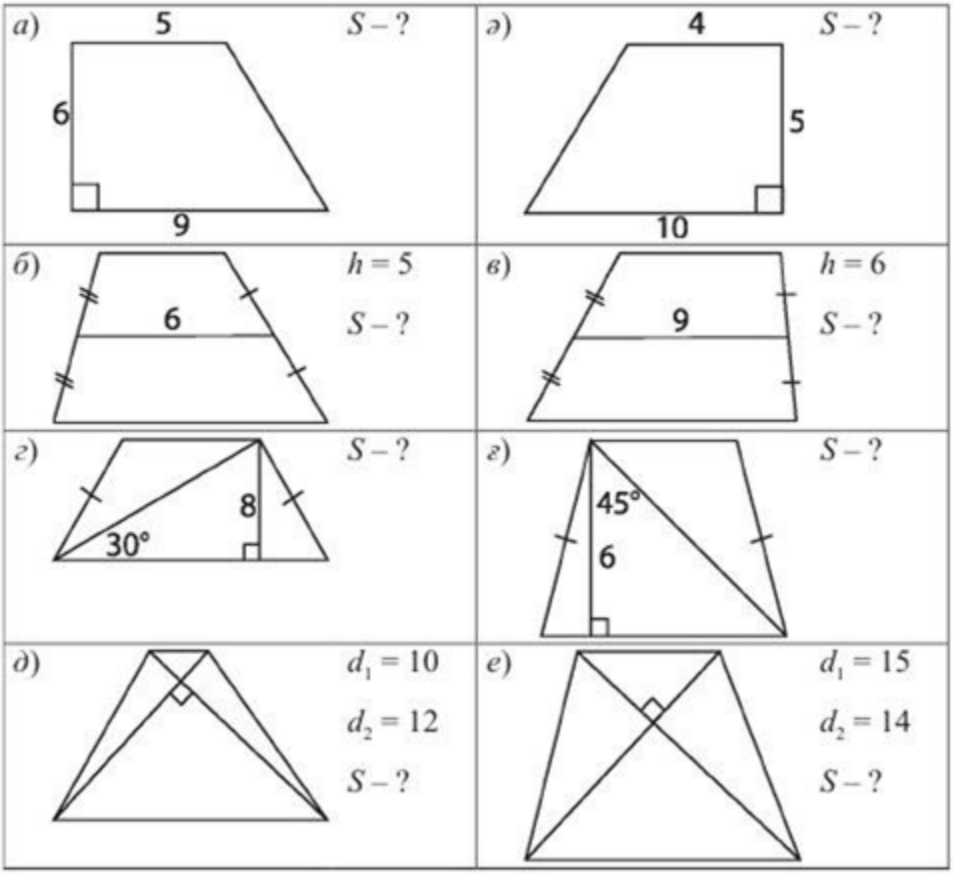
$S = 85$

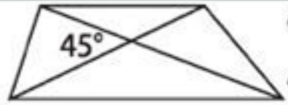
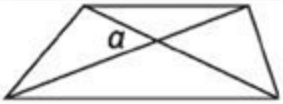
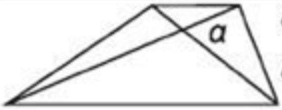
x – ?



Трапецияның ауданы

58. Трапецияның ауданы мен белгісіз элементтерін табыңдар:



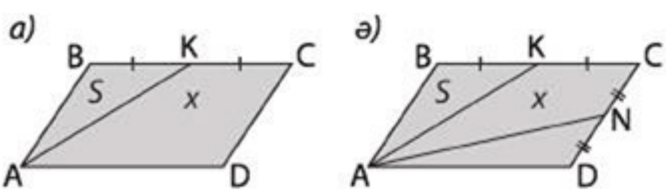
ж)  $d_1 = 8$ $d_2 = 5$ $S - ?$	*з*)  $d_1 = 12$ $d_2 = 10$ $S - ?$
и)  $d_1 = 12$ $d_2 = 18$ $S = 48\sqrt{2}$ $\alpha - ?$	*к*)  $d_1 = 15$ $d_2 = 12$ $S = 45\sqrt{3}$ $\alpha - ?$

59. Трапецияның биіктігі 8 см-ге тең. Егер трапеция табандарының: а) қатынасы 1 : 5 қатынасындай, ауданы 24 см^2 болса; ә) айырымы 6 см, ауданы 56 см^2 болса, трапецияның табандарын табыңдар.

60. Теңбүйірлі трапецияның табандары: а) 3 см және 9 см, диагоналі 15 см болса; ә) 7 см және 25 см, диагоналі бүйір қабырғасына перпендикуляр болса, трапецияның ауданын табыңдар.

61. Бүйір қабырғаларының қатынасы 4 : 5 қатынасындай, табандарының айырымы 9 см-ге тең тікбұрышты трапецияның: а) кіші диагоналі 20 см-ге; ә) үлкен диагоналі 20 см-ге тең болса, оның ауданын табыңдар.

62. *ABCD* – параллелограмм, *K* нүктесі – *BC* қабырғасының ортасы. *ABK* үшбұрышының ауданы *S*-ке тең. 136-суреттегі берілгендерді пайдаланып, *x* ауданын табыңдар.



136-сурет

Дұрыс жауапты анықтаңдар (63–70).

63. Параллелограмның қабырғалары 7,2 см және 4,8 см. Үлкен қабырғасына жүргізілген биіктік 6,4 см. Параллелограмның басқа биіктігін табыңдар.

а) ≈ 4,3 см; ә) 4,8 см; б) 6,4 см; в) 7,2 см; г) 9,6 см.

64. *ABCD* трапециясының табандары 4 см және 10 см, *BK* және *CM* екі биіктігі жүргізілген. *BCMK* төртбұрышы шаршы болса, трапецияның ауданы неге тең?

а) 20 см^2; ә) 28 см^2; б) 30 см^2; в) 40 см^2; г) 56 см^2.

65. Теңбүйірлі трапецияның доғал бұрышынан жүргізілген биіктік бүйір қабырғасымен 45° бұрыш жасайды және табанын 6 см және 30 см кесінділерге бөледі. Трапецияның ауданын табыңдар.

а) 108 см^2; ә) 144 см^2; б) 180 см^2; в) 216 см^2; г) 360 см^2.

66. Параллелограмның қабырғаларының қатынасы 1 : 2 қатынасындай. Параллелограмның периметрі 72 см-ге тең, ал бір бұрышы 120°. Оның ауданын табыңдар.

а) 144 см^2; в) 288 см^2;
ә) $144\sqrt{2}$ см^2; г) $288\sqrt{3}$ см^2.
б) $144\sqrt{3}$ см^2;

67. Үшбұрыштың екі қабырғасы 9 см және 10 см, арасындағы бұрыш 30° болса, оның ауданы:

а) 20,5 см^2; ә) 22,5 см^2; б) 25 см^2; в) 38 см^2; г) 45 см^2-ге тең болады.

68. *ABCD* шаршысы берілген. *AD* қабырғасының созындысында $AK = 1,5AD$ болатындай *K* нүктесі алынған. *ABCK* трапециясының ауданы *ACK* үшбұрышының ауданынан неше есе үлкен?

а) $\frac{4}{3}$ есе; ә) 1,5 есе; б) $\frac{5}{3}$ есе; в) 2 есе; г) $\frac{7}{3}$ есе.

69. Ромбтың диагоналі оның қабырғасына тең. Ромбтың периметрі 4*a*-ға тең болса, ауданы неге тең болады?

а) $\frac{\sqrt{2}}{2a^2}$; ә) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $2a^2$; в) $2a^2\sqrt{3}$; г) $a^2\sqrt{3}$.

70. Тіктөртбұрыш пен параллелограмның қабырғалары бірдей, 3 см және 4 см. Егер параллелограмның ауданы тіктөртбұрыштың ауданынан екі есе кіші болса, оның кіші бұрышын табыңдар.

а) 20°; ә) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

Бос орындарды толтырыңдар (71–74).

71. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы 10 см және $7\sqrt{2}$ см, ал олардың арасындағы бұрыш 45° болса, онда ауданы ... см^2-ге тең.

72. Егер тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 6 см, ал сүйір бұрышы 45° болса, онда ауданы ... см^2-ге тең.

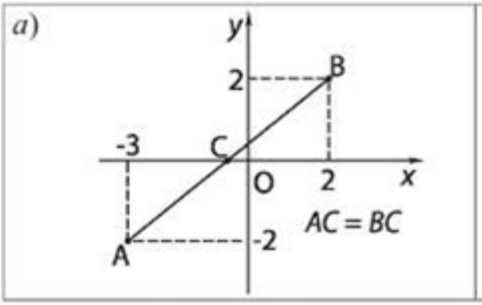
73. Теңқабырғалы үшбұрыштың ауданы $16\sqrt{3}$ м^2 болса, онда қабырғасы ... м-ге тең.

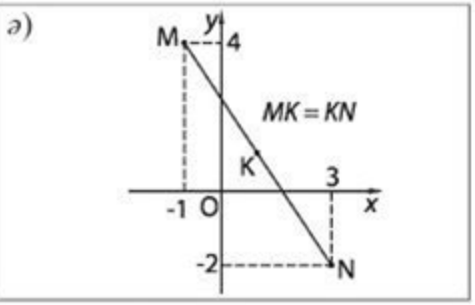
74. $ABCD$ параллелограмының A бұрышы 60°-қа тең, $AB = 2$ дм, BH – биіктік, $HD = 4$ дм болса, онда ауданы ... дм^2-ге тең.

IV. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТІКБҰРЫШТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕСІ

Координаталар: жазықтықтағы нүктелер; кесіндінің ортасы. Екі нүктенің арақашықтығы

75. Кесіндінің ұштары мен ортасының координаталарын табыңдар:

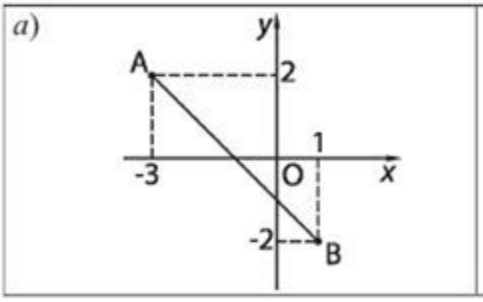


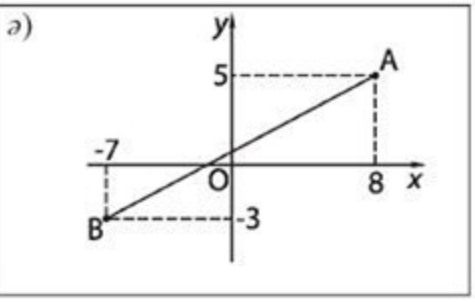


76. Кестені толтырыңдар, мұндағы $AM = MB$, $M \in AB$:

A	(3; 8)	(1; 3)		(4; 8)	(–7; 3)	(5,4; 2,3)
B	(5; 2)		(4; –2)	(8; 4)		(3,6; 3,5)
M		(5; 6)	(0; 0)		(5; 2)	

77. Кесінді ұштарының координаталары мен ұзындығын табыңдар:

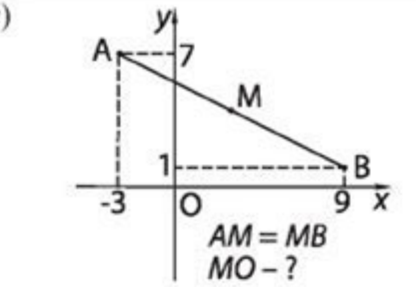


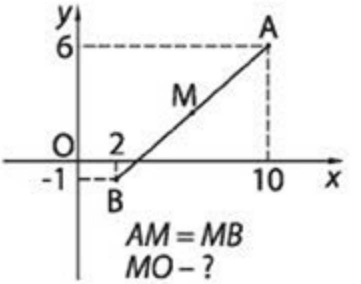


78. Кестені толтырыңдар, мұндағы AB – нүктелердің арақашықтығы:

A	(5; 5)	(–2; 14)	(1; –1)	(0; –7)	(6,9; 6,8)	$(5\sqrt{3}; -7)$
B	(2; 9)	(10; 9)	(7; –9)	(24; 0)	(8,1; 5,1)	$(2\sqrt{3}; -9)$
AB						

79. Белгісіз элементтерді табыңдар:

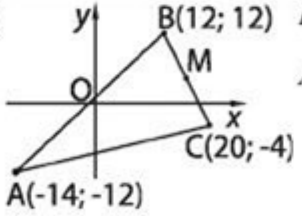
а)


ә)


80. Кестені толтырыңдар, O – координаталар басы, $B \in Ox$, $C \in Oy$ және $AB \perp Ox$, $AC \perp Oy$:

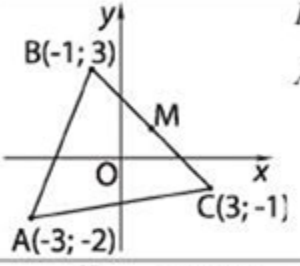
A	(3; 4)	(–5; 12)	(15; 0)	(16; 30)	(0,8; 0,6)	$(3\sqrt{3};\ \sqrt{22})$
AO						
AB						
AC						

81. Белгісіз элементтерді табыңдар:

а)


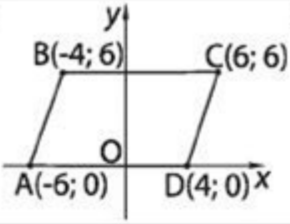
$BM = CM$

AM – ?

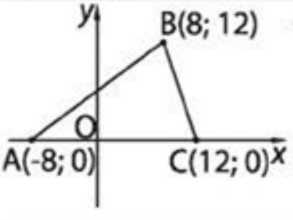
ә)


$BM = CM$

AM – ?

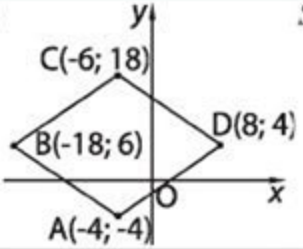
б)


S_{ABCD} – ?

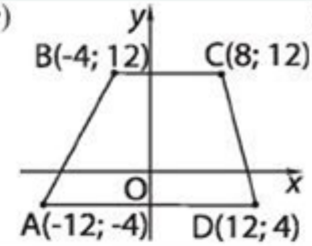
в)


S_{ABC} – ?

г) S_{ABCD} – ?



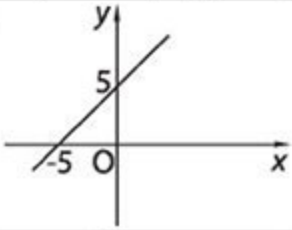
ғ) S_{ABCD} – ?



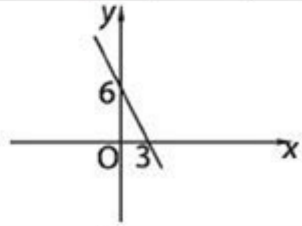
Түзудің теңдеуі

82. $y = kx + p$ түзу теңдеуінің белгісіз коэффициенттерін табыңдар:

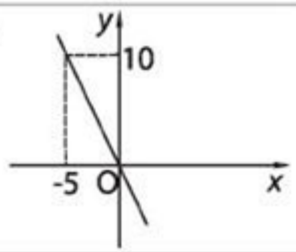
а) p – ?



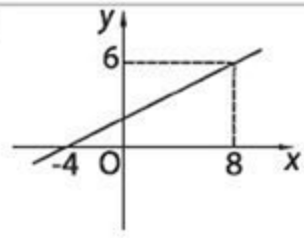
ә) p – ?



б) k – ?



в) k – ?



83. Параллель түзулерді таңдаңдар:

а) $y = 2x + 4$; ә) $y = 6x - 5$; б) $y = 8$; в) $y = 4x$;
г) $y = -5x + 6$; ғ) $y = 8 - 2x$; д) $y = 9x + 1$; е) $y = 8x$;
ж) $y = 2x$; з) $y = 24$; и) $y = x + 9$; к) $y = 8x - 9$.

84. Перпендикуляр түзулерді таңдаңдар:

а) $y = 5x - 4$; ә) $y = 6x - 5$; б) $y = 6x + 7$; в) $y = 4x - 2$;
г) $y = -5x + 6$; ғ) $y = 8 - 0{,}2x$; д) $y = -6x - 7$; е) $y = 2 - 0{,}25x$.

85. Теңдеуді $y = kx + p$ түріне келтіріп, k мен p мәндерін көрсетіңдер:

а) $4y - 8x + 20 = 0$; б) $3x - 0{,}2y + 2 = 0$;
ә) $5y + 2x - 30 = 0$; в) $5y + 8x - 4 = 0$.

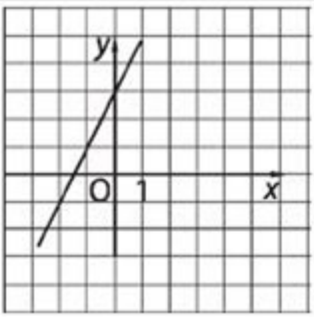
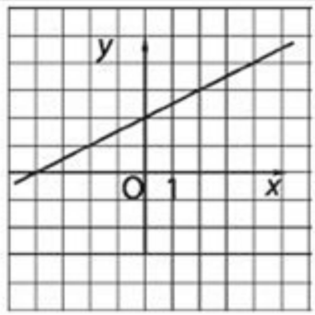
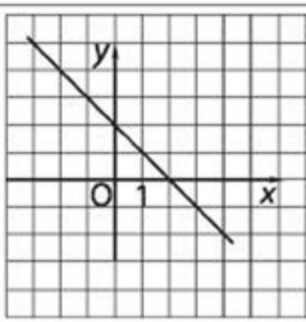
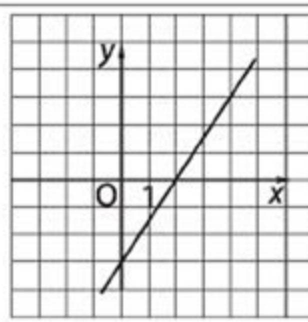
86. $y = 8x - 15$ түзуінде жататын нүктелерді таңдаңдар:

$A(1; 5)$	$B(2; -7)$	$C(-2; -31)$	$D(1; -7)$
$E(4; 32)$	$F(0; -15)$	$G(2; 1)$	$H(1,5; -3)$

87. $A(4; 7)$ нүктесінен өтетін түзулерді таңдаңдар:

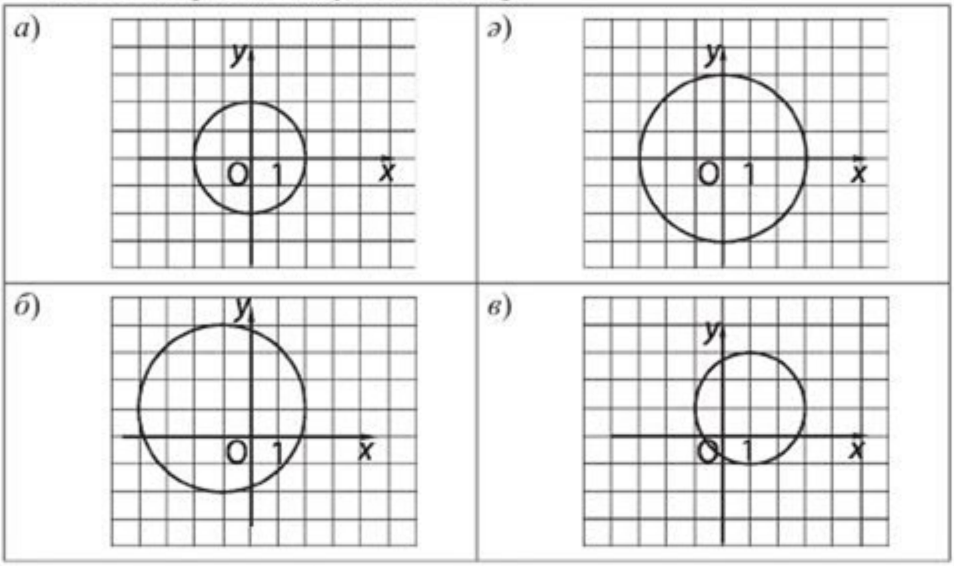
а) $y = 4x + 7$; ә) $y = 2x - 1$; б) $y = 5x + 2$; в) $y = 4x - 9$;
г) $y = 7x + 4$; ғ) $y = 11 - x$; д) $y = x + 3$; е) $y = 2 + 0,7x$.

88. Графиктер мен теңдеулер арасындағы сәйкестікті орнатыңдар:

а)		*ә)*	
б)		*в)*	
1)	$y = 0,5x + 2$	2)	$y = 2 - x$
3)	$y = 2x + 3$	4)	$y = 1,5x - 3$

Шеңбердің теңдеуі

89. Шеңбердің теңдеуін жазыңдар:



90. $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ шеңберінде жататын нүктелерді таңдаңдар:

$A(1; 0)$	$B(3; 1)$	$C(8; -4)$	$D(0; 0)$
$E(2; -3)$	$F(7; -1)$	$G(2; 20)$	$H(6,5; 2)$

91. Кестені толтырыңдар, мұндағы O – шеңбердің центрі, R – радиусы:

O	$(4; 2)$		$(-1; 5)$	
R	4		3	
теңдеу		$x^2+y^2=36$		$(x-7)^2+(y+2)^2=49$

Дұрыс жауапты табыңдар (92–95).

92. $y=6x-5$ түзуіне тиісті нүкте:

а) $(-1; 1)$; ә) $(2; -7)$; б) $(-2; -7)$; в) $(2; 7)$; г) $(0; 5)$.

93. Қай теңдеу түзудің теңдеуі болады:

а) $x+y=4$; б) $(x+y)^2=4$; г) $x+y=4xy$?
ә) $|x+y|=4$; в) $x^2-y^2=4$;

94. Қай теңдеу шеңбердің теңдеуі болады:

а) $x^2 + 1 = 4$; б) $(x + y)^2 = 4$; г) $x^2 + y^2 = 4xy$?

ә) $x^2 + y^2 = 4$; в) $x^2 - y^2 = 4$;

95. $y = 10x - 4$ түзуіне параллель түзулер:

а) $y = -10x - 4$; в) $y = 10 - 4x$;

ә) $y = -10x$; г) $y = 10x$.

б) $y = 10x - 2$;

96. Центрі (–3; 4) нүктесінде және радиусы 8-ге тең болатын шеңбердің теңдеуі:

а) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 64$; в) $(x + 3)^2 - (y - 4)^2 = 64$;

ә) $(x - 3)^2 - (y + 4)^2 = 64$; г) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$.

б) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$;

Бос орындарды толтырыңдар (97–100).

97. Егер $C(-1; 4)$, $D(-3; -10)$, онда CD кесіндісінің ортасы болатын O нүктесінің координаталары ... .

98. $A(5; -7)$ және $B(2; -3)$ нүктелерінің арақашықтығы ... тең.

99. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$ шеңберінің центрінің координаталары: ... .

100. Егер үшбұрыштың төбелері $A(8; 12)$, $B(-8; 0)$, $C(-2; -8)$ болса, онда CM медианасын қамтитын түзудің теңдеуі ... .

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

1. 132°, 48°, 132°. **2.** 100°. **3.** 125°, 55°. **4.** 4 бұрышы 60°-тан және 4 бұрышы 120°-тан. **5.** Параллель түзулердің қасиеттерін пайдаланып, *MAO* және *OBK* үшбұрыштары теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер. **6.** Табаны 5 см, бүйір қабырғасы 11 см. **7.** а) 10 см, 10 см, 16 см; ә) 14 см, 14 см, 12 см немесе 12 см, 12 см, 16 см. **8.** 56°, 56°. **9.** 80°, 50°, 50°. **10.** 60°, 90°. **11.** 125°. **12.** 7 см. **13.** 4,5 см. **14.** 50°. **18.** а) 36°, 54°; ә) 9 см. **19.** а) 50 м; ә) 600 жыл. **20.** 8 см. Тікбұрышты үшбұрыштың қасиетін пайдаланып, *C* бұрышын табыңдар. **21.** 7 см. **22.** 8 см. **23.** 90°. **24.** 5 см. **25.** Шеңберге бір нүктеден жүргізілген жанамалардың қасиеттерін пайдаланыңдар. **26.** 1,5 см. **27.** 16 см, 12 см. **28.** 4 см. *ABC* үшбұрышында *BH* – биіктігі, *O* – үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің центрі. *AOH* үшбұрышын қарастырыңдар. **29.** 110°. *ABC* үшбұрышының бұрыштарының қосындысын және іштей сызылған шеңбердің *O* центрінің қасиеттерін пайдаланыңдар. **31.** 96°. **32.** а) 120°; ә) 96°. **33.** а) 59°; ә) 110°, 250°. **34.** а) 0,5°; ә) 270°; б) 0,25°. **35.** 90°, 270°. **36.** 90°, 140°, 130°. **37.** Шеңберге іштей сызылған тікбұрышты үшбұрыштың қасиетін пайдаланыңдар. **38.** $\angle A = \alpha$ болсын, *ABC*, *ACD*, *BCD* үшбұрыштарының сүйір бұрыштарын α арқылы өрнектеңдер. **39.** Алдымен, ΔBOC және ΔAOD теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер, содан соң, вертикаль бұрыштарды α деп белгілеп, осы үшбұрыштардың табанындағы бұрыштарын α арқылы өрнектеңдер. **40.** *MAC* және *NBC* үшбұрыштарының табан бұрыштарын, сәйкесінше, α және β деп белгілеп, *M* бұрышын α арқылы, ал *N* бұрышын β арқылы өрнектеңдер. Содан соң, $AM \parallel BN$ түзулерін *MN* қиюшымен қиғандағы тұстас бұрыштардың қасиеттерін пайдаланып, $\alpha + \beta$ қосындысын табыңдар. **41.** 20°. $\angle B = \alpha$ болсын. Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиетін пайдаланып, теңбүйірлі *MNK*, *MKC*, *AMC* үшбұрыштарының бұрыштарын α арқылы өрнектеңдер. *ABC* үшбұрышының *A* бұрышын өрнектеп, теңдеу құрыңдар. **42.** ә) Мүмкін емес; в) 1) 540°-қа; 2) 1440°-қа. **43.** а) 1) 3; 2) 4; ә) 100°, 140°; б) 1) 140°, 40°; 2) 126°, 54°; в) 1) 900°; 2) 1440°; г) 1) және 2) – мүмкін емес, неге екенін түсіндіріңдер. **44.** а) 40; ә) 50. **45.** ә) 1), 3) – мүмкін емес; 2) мүмкін; б) 1) бар болады; 2) болмайды. **46.** а) 1) 5; 2) 6; 3) 8. **47.** а) 8 см, 6 см, 5 см, 4 см; ә) 1) 120°, 8 см, 8 см; 2) 90°, 5 см, 5 см. **48.** а) Бұл – диагональдарының қиылысу нүктесі. Үшбұрыштардың теңсіздігін пайдаланып, диагональдарының ұзындықтарының қосындысын төртбұрыштың кез келген нүктесінен оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысымен салыстырыңдар. ә) Болады. **49.** а) $(10 + 2a)$ см; г) 90°. **50.** а) $\angle R = \alpha + \beta = \angle Q$, $\angle F = 180° - \alpha - \beta = \angle P$; ә) $\angle A = \angle C = 2\alpha$, $\angle B = \angle D = 180° - 2\alpha$. ABC және ADC үшбұрыштарының теңдігінен параллелограмның барлық қабырғаларының теңдігі шығады. **51.** а) BM және CM $(M \in AD)$ биссектрисалары жүргізілген болсын. ΔABM және ΔDCM теңбүйірлі екенін дәлелдеңдер (BC және AD параллель түзулері мен BM және CM қиюшыларынан пайда болған бұрыштардың қасиеттерін пайдаланыңдар). ә) 150 мм. **52.** а) 47°, 133°, 47°, 133°; ә) 55°, 125°, 55°, 125°. **53.** Теңбүйірлі үшбұрыштың бұрыштарының қасиеттерін және екі параллель түзу мен қиюшыдан пайда болған бұрыштардың қасиеттерін пайдаланыңдар. **54.** Тіктөртбұрыш. 1) Параллелограмның қарама-қарсы бұрыштарының теңдігін және түзулердің параллельдігінің белгілерін пайдаланып, $BB_1 \parallel DD_1$ және $AA_1 \parallel CC_1$ екенін дәлелдеңдер. 2) $ABCD$ параллелограмында $\angle B + \angle C = 180°$ екенін пайдаланып, A_1ND_1 үшбұрышында $\angle D_1 + \angle A_1 = 90°$ екенін дәлелдеңдер. **55.** а) $8 + 2a$; ә) $\angle E = \angle M = \alpha$, $\angle K = \angle P = 180 - \alpha$; б) $\angle Q = \angle S = 60°$, $\angle R = \angle T = 120°$, $P_{QRST} = 22$. **56.** а) 13 см; ә) параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесіне қарағандағы симметрияны пайдаланыңдар. **57.** а) 45°, 135°, 45°, 135°; ә) 36°, 144°, 36°, 144°. **58.** а) 20 см немесе 22 см; ә) 5 см және 4 см; б) b және $a - b$. **59.** а) 6 см және 8 см немесе 8 см және 10 см; 60° және 120°; ә) алдымен тікбұрышты ΔABH-ты салыңдар. **60.** $DC \parallel AB$ түзулері мен AF қиюшысының және $AD \parallel BC$ мен AE қиюшысынан пайда бол ған бұрыштардың қасиеттерін пайдаланыңдар. **61.** 5 см, 2 см, 5 см. Параллелограмның қабырғасында үш кесіндінің орналасуының барлық жағдайларын қарастырыңдар. **62.** а). **63.** а) Егер төртбұрыштың екі қабырғасы параллель әрі тең болса, оның параллелограмм болатын белгісін пайдаланыңдар. б) Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде қақ бөлінсе, онда ол параллелограмм болатын белгісін пайдаланыңдар. **64.** ә) 1) Болады; 2) жоқ. **66.** а) 63, б) есеп сияқты. **67.** а) $AMCN$ параллелограмм екенін дәлелдеңдер; б) Кубтың жақтарының қасиеттерін (олар шаршы болады) және түзулердің параллельдігінің белгілерін пайдаланыңдар. **68.** 24 см. **69.** а) Дөңес төртбұрыштың бұрыштарының қосындысын және тіктөртбұрыштың белгісін пайдаланыңдар. ә) Параллелограмның және тіктөртбұрыштың белгілерін пайдаланыңдар. **70.** Болмайды, мысалы, бұрыштары 90°, 60°, 90°, 120°. **71.** Тіктөртбұрыштың диагональдарының қасиеттерін пайдаланыңдар. **72.** а) 8 см, 16 см; ә) 20 см немесе 28 см; б) 60°. **73.** а) 34 см; ә) 8 см. **74.** а) 72; ә) бөлменің ұзындығының бойымен салу керек. **75.** а) 10°; ә) диагоналі 4 см-ге тең шаршы. **76.** ә), б). **77.** 80°, 100°, 80°, 100°. **78.** а) 60°, 120°, 60°, 120°; ә) 30°, 60°. **79.** а) 60°, 120°, 60°, 120° болатын төртбұрыш. Үшбұрыштың сыртқы бұрышының қасиетін және тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысын пайдаланыңдар. ә) 126°, 54°, 126°, 54°. **80.** а) ABC және ADC, ABD және CBD үшбұрыштары симметриялы, демек $AB = AD$, $BC = CD$ және $AB = BC$, $AD = BD$. Яғни, $AB = BC = CD = DA$ ... . **81.** а) Симметриялы нүктелердің анықтамасын және теңбүйірлі үшбұрыштың симметриясының қасиетін пайдаланыңдар; ә) AD = 1 дм, BC = 2 дм. **82.** а), б). ә) және в) тұжырымдарының дұрыс еместігін дәлелдейтін төртбұрыштарды салыңдар. **83.** а) Жоқ. Осыны дәлелдейтін мысал келтіріңдер. **84.** 45°, 90°, 45°. **85.** а) 36,8 см; ә) шаршы, P = 18 см. **86.** 16 см. Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттерін пайдаланыңдар. **87.** 32 см. **89.** Бағандары A және B нүктелерінде қалсын. Егер олар шаршының симметрия центрі болатын O нүктесіне қарағанда симметриялы болса, онда есептің шешімі жоқ. Басқа жағдайда A және B нүктелеріне O центріне қарағанда симметриялы болатын A_1 және B_1 нүктелерін табу керек. Сонда $AB_1 \parallel BA_1$. Содан соң O нүктесі арқылы AB_1 түзуіне перпендикуляр MN түзуін ($M \in AB_1$, $N \in BA_1$) салуға болады. AB_1 және BA_1 түзулеріне OM кесіндісіне тең ME, MK, NL, NP кесінділерін салып, $EKPL$ төртбұрышын аламыз. Оның шаршы екенін дәлелдеңдер. **90.** а) Кері жорып дәлелдеу тәсілін пайдаланыңдар. **91.** 70°, 110°, 125°. **92.** 90°. **93.** 50°, 130°, 50°, 130°. **94.** 20 см. **95.** 12 см, 5 см. **96.** 17 см. **97.** 10 см, 5 см, 5 см, 5 см. **98.** *ABCD* трапециясының симметрия осі тек қана *MN* түзуі болады, мысалы, трапецияның *BC* және *AD* табандарының орталары арқылы өтетін және оларға перпендикуляр болатын (неге екенін түсіндіріңдер). *B* және *C*, *A* және *D* нүктелері *MN* түзуіне қарағанда симметриялы. Содан соң *AMN* және *DMN*, *ABM* және *DCM* үшбұрыштарының теңдігін пайдаланып, *AB* және *DC* кесінділерінің теңдігін анықтаңдар. **99.** а) Екі кесінді және бұрыш берілген. Алдымен, берілген бұрышқа тең бұрыш салыңдар және оның қабырғаларына төбесінен бастап, берілген кесінділерге тең кесінділер салыңдар. Кесінділердің ұштарын қосып, үшбұрыш салыңдар. Содан соң, үшбұрышты қарама-қарсы қабырғалары тең болатын төртбұрышқа толықтырыңдар және осы төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер. ә) Екі кесінді мен бұрыш берілген. Алдымен, берілген кесінділерді қақ бөліңдер. Содан соң берілген бұрышқа тең бұрыш салып, төбесінен бастап оның қабырғаларына және оларға қарама-қарсы сәулелерге берілген кесіндінің жартысына тең кесінділер салыңдар. Пайда болған төртбұрыш параллелограмм болатынын дәлелдеңдер. **100.** ә) Мұндай *ABCD* ромб салынды деп есептейік, оның $AC = d$ диагоналі мен $ADB = \beta$ бұрышы белгілі болсын; $\angle DAC = 90° - \beta$ болатынын анықтаңдар (бұл айырымды қосымша сызбада салуға болады). Содан соң *AC* қабырғасы мен оған іргелес екі бұрыш бойынша ΔADC және оған тең *ABC* үшбұрышын салыңдар. **101.** Мұндай *ABCD* шаршысы салынды деп есептейік және берілген кесінді $AE = AC + CD$. Сонда *AED* үшбұрышының *AE* қабырғасы және екі бұрышы белгілі болады $\left(\angle A = 45°, \angle E = \frac{45°}{2}\right)$. Бұл үшбұрышты салып, шаршының *AD* қабырғасын табамыз. **102.** а) Ұзындықтары әртүрлі үш *a*, *b* және *c* кесінділері берілген. $\angle A = 90°$, үлкен табаны $AD = a$, $AB = b$ және $CD = c$ болатын *ABCD* трапециясын салу керек болсын. Алдымен, *A* тік бұрышын салып, қабырғаларына *AD* және AB кесінділерін салыңдар. Содан соң B төбесінен AD-ға параллель BK түзуін жүргізіңдер ($BK \perp AB$ салуға болады, неге екенін түсіндіріңдер). Содан соң циркульмен BK ($DC = c$) түзуіндегі C нүктесінің орнын анықтаңдар. Пайда болған төртбұрыш трапеция болатынын дәлелдеңдер. **103.** а) Мысалы: 1) A_1A_3 және B_1B_3 кесінділері A_2A_4 және B_2B_4 кесінділеріне пропорционал; 2) $\frac{AA_2}{AA_3} = \frac{AB_2}{AB_3}$; б) 1) 8,75; 2) 8,125; 3) 13,5. **104.** а) 59-суретті қараңдар. **105.** а) 1) 14 см, 28 см, 56 см; 2) 24,5 см, $32\frac{2}{3}$ см, $40\frac{5}{6}$ см; ә) $\frac{dx}{x+y}$, $\frac{dy}{x+y}$. **106.** а) Алдымен, BCA бұрышының, содан соң CAD бұрышының қабырғаларынан белгіленген кесінділер үшін Фалес теоремасын пайдаланыңдар; ә) 5 см, 10 см. **107.** а) MCN және KAN үшбұрыштарының теңдігін дәлелдеңдер және параллелограмның белгісін пайдаланыңдар. **108.** а) Фалес теоремасын қолданып, AC диагоналінің ортасы арқылы өтетін және трапецияның табандарына параллель түзу BD диагоналін екі тең бөлікке бөлетінін, ал диагональдарының орталары арқылы өтетін түзу трапецияның табандарына параллель болатынын дәлелдеңдер. **109.** 5 см. **110.** 10 см. **111.** а) 12 см; ә) 67,5 см. **112.** Үшбұрыштың орта сызығының қасиетін пайдаланыңдар. **113.** а) Тіктөртбұрыштың диагоналін жүргізіңдер және үшбұрыштың орта сызығының қасиетін, тіктөртбұрыштың диагональдарының қасиетін, параллелограмның белгісін және ромбтың анықтамасын пайдаланыңдар. ә) Ромбтың диагональдарын жүргізіңдер және үшбұрыштың орта сызығының қасиетін, ромбтың диагональдарының қасиетін, параллелограмның белгісін және тіктөртбұрыштың анықтамасын пайдаланыңдар. **114.** а) DBC үшбұрышын A нүктесі қабырғаның ортасы болатындай етіп салуға болады. Содан соң DBC үшбұрышының A нүктесі арқылы өтетін орта сызығын салу керек. ә) M, N, K нүктелері, сәйкесінше, AB, BC, AC қабырғаларының орталары болатындай ABC үшбұрышын салдық деп жориық. Сонда $AB \parallel NK$, $BC \parallel MK$, $AC \parallel MN$. Параллель түзулер салу үшін өзара тең айқыш бұрыштар салу жеткілікті: $\angle KMA = \angle NKM$, $\angle MNB = \angle NMK$, $\angle NKC = \angle KNM$. Үшбұрыштың ізделінді үшбұрыш екенін дәлелдеу ғана қалды, яғни M, N, K нүктелері оның қабырғаларының орталары болатынын дәлелдеу керек. Ол үшін $MNKC$ және $KNBM$, $NBMK$ және $KNMA$, ... параллелограмдарының қабырғаларының қасиетін пайдаланыңдар. **115.** 8 см. **116.** а) Фалес теоремасын пайдаланыңдар. ә) 8 см. **117.** 8 см, 11 см. **118.** 10 см, 22 см. **119.** 6 см. **120.** 6,75 дм. **121.** а) 1 дм. Диагональдарының қиылысу нүктесінен биіктік жүргізіңдер және теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың қасиетін пайдаланыңдар. ә) 60°, 120°, 120°, 60°. **122.** а) 50 см. ә) 6 см. **123.** Болмайды. **124.** а) 76°; ә) 1,4 см. **126.** а) Теңбүйірлі; ә) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. **128.** а) 12 см; ә) 4 см. AD медиана болсын, сонда $AO : OD = 2 : 1$, ал $OK \parallel DB$ болғандықтан, $AK : KB = 2 : 1$ болады. Демек, $AK = 8$ см. Әрі қарай бұрышы 30°-қа тең болатын тікбұрышты ΔADB-ның қабырғаларының қасиетін пайдаланыңдар. **129.** Мүмкін емес. Табаны AC, медианалары AA_1 және BB_1, O медианалардың қиылысу нүктесі болатын теңбүйірлі ABC үшбұрышы берілсін. Үшбұрыштың теңсіздігін қолданып, BOC үшбұрышын қарастырыңдар. **130.** а) Алдымен, m және n кесінділерін 3 тең бөлікке бөліңдер және $BC = a$, $BO = \frac{2}{3}m$, $CO = \frac{2}{3}n$ ... болатын BOC үшбұрышын салыңдар. **131.** $AC \perp CD$ және $DB \perp AB$ екенін дәлелдеңдер. Содан соң үшбұрыштың биіктіктерінің қасиетін пайдаланыңдар. **132.** а) 1) және 2) ақиқат; ә) тікбұрышты үшбұрыштардың теңдігінің белгілерін пайдаланып, үшбұрыштың төбелерінен есепте көрсетілген түзуге түсірілген перпендикулярлары тең екенін дәлелдеңдер; б) 36 см. **133.** 13. **134.** а) 4 см, 10 см; ә) ромб, 4 см. **135.** а) Төртбұрыштың диагональдары перпендикуляр болса. ә) төртбұрыштың диагональдары тең болса. **136.** а) 6,5 см; ә) 10 см; б) 4 см. **137.** а) $0{,}5(p - c)$. **138.** а) Үшбұрыштың осьтік симметриясының қасиетін пайдаланыңдар; ә) 54-есептің нұсқауын және тіктөртбұрыштың бір диагоналін қамтитын және параллелограмның табанына параллель болатын түзудің қасиетін пайдаланыңдар; б) төбелері берілген төртбұрыштың диагональдарының орталары мен қарама-қарсы қабырғаларының орталарында жататын төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер. **139.** 1А) 70°, 110°, 70°, 110°; 2В) 17 см; 3В) параллелограмның диагональдарының қасиетін және тіктөртбұрыштың белгісін пайдаланыңдар; 4С) 8 см; 5С) алдымен трапецияның орта сызығына тең болатын кесінді салыңдар, содан соң Фалес теоремасын қолданып, оны үш тең бөлікке бөліңдер. **142.** ә) $\frac{1}{2}$. **143.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **144.** а) 0,8; ә) 1. **145.** а) 0,6; ә) 1,4. **146.** а) 10 см; ә) 9 см. **147.** а) 0,6; ә) $\frac{1}{2}$; б) ≈ 77,3 см. **148.** а) Жоқ; ә) болады, Пифагор теоремасына кері теорема бойынша. **149.** а) Дұрыс; ә) n рет; б) 10 %-ға. **150.** а) $1,5\sqrt{2}$ дм; ә) 1,6 дм және 3,4 дм. **151.** а) 5 дм; ә) 20 см; б) 25 см. Түзуге қарағанда симметриялы нүктелердің қасиетін пайдаланып, AA_1CC_1 – диагональдары тең параллелограмм екенін дәлелдеңдер. **152.** а) 5 дм; ә) 24 см. **153.** а) 12 м; ә) жоқ. **154.** 9 м. **155.** $8\sqrt{3}$ см және $8\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{30}$ см және $4\sqrt{6}$ см **156.** 5 см. ΔBDC – тікбұрышты екенін көрсетіңдер. **157.** а) $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{5}$ см, $6\sqrt{5}$ см; ә) $3\frac{1}{3}$ см; б) ≈ 27°. Пифагор теоремасына кері теореманы және косинус мәндерінің кестесін пайдаланыңдар. **158.** а) 10 см, 17 см; ә) $AX^2 - BX^2 = XD^2 - XC^2$ болатынын дәлелдеңдер; б) 1 : 3, ΔABC мен ΔABH-тан $\cos\angle BAC$-ны өрнектеңдер; в) 2,4 см, $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $CB = 3$ см болатын ΔABC берілген болсын, CD – ізделінді биіктік; $\cos\angle A = \cos\angle BCD$ екенін ескеріп, пропорция құрыңдар. **159.** а) 24 см; ә) ≈ 3,2 см, $AB = BC = 6$ см, $AC = 4$ см болатын ΔABC берілген болсын, BH – оның биіктігі, O – үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі, $OK \perp BC$, $K \in BC$; $\cos\angle CBH = \cos\angle KBO$ болатынын ескеріп, пропорция құрыңдар. **161.** а) 0,8; ә) 1,4; б) 0,75; в) 1; г) 2; ғ) 1. **162.** а) 0,6; ә) 1; б) $2\frac{1}{12}$; в) 7,84. **163.** а) 1) 4 см, 5 см; 2) 24 см, 26 см; ә) 4,5 см, 16-тармақтағы 2-есепті шешкендегі қорытындыны пайдаланыңдар; б) $\frac{12}{35}$ және $2\frac{11}{12}$; в) ≈ 2,7 км. **165.** а) 13 см; ә) 1) $8\sqrt{3}$ см; 2) ≈ 6,8 см; 3) ≈ 15 см; б) ≈ 98°; в) ≈ 6,4 см. **166.** AB диаметрі мен BC хордасы берілген болсын. Әрі қарай C тік бұрышының төбесінен CD биіктігін жүргізіп, A бұрышы мен оған тең DCB

бұрышының синустарын өрнектеңдер. **167.** а) 1) және 2) 0,2; 0,(3); $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) 2; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4. **168.** а) Ақиқат; ә) жоқ, мысал келтіріңдер. **169.** $3\sqrt{3}$ м. **170.** б) $\cos 70° < \sin 50° < \cos 20°$, себебі $\sin 50° = \cos 40°$; ғ) $\text{ctg } 80° < \text{tg } 40° < \text{tg } 60°$, себебі $\text{ctg } 80° = \text{tg } 10°$. **172.** а) 75°; ә) дұрыс, соны дәлелдеңдер. **173.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **175.** а) $\sin 20° < \sin 35°$; ә) $\cos 15° > \cos 70°$; б) $\sin \alpha > \sin^2\alpha$; в) $\cos \alpha < \cos^{-1}\alpha$. **176.** а) $\sin 60°$; ә) $\text{tg } 45°$; б) $\sin^2 60°$; в) $\sin 40° \cdot \cos 20°$, әрбір көбейткішті $\frac{1}{2}$-мен салыстырыңдар. **177.** а) 0,5; ә) –0,5. **178.** а), ә) дұрыс. **179.** а) 1) ≈ 44°, ≈ 46°; 2) ≈ 54°, ≈ 36°; ә) 1) 45°; 2) ≈ 40°. **180.** а) ≈ 6,9 см; ә) ≈ 15,5 см. **181.** а) $3\sqrt{3}$ см; ә) $8\sqrt{3}$ см. **182.** ≈ 13 см. **183.** а) $\frac{5}{13}$, $\frac{5}{12}$; ә) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$. **184.** а) Жоқ; ә) бар болады. **185.** а) 1) және 2) – дұрыс. **187.** а) 24 м, 13,44 м; ә) 1) ≈ 1,4 см; 2) 3,0 см; 1) tg 25°-ты, 2) cos 10°-ты пайдаланыңдар. **188.** 0,345. Берілген $(\sin \alpha + \cos \alpha = 1,3)$ теңдіктің сол және оң жақтарын квадраттаңдар, содан $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ көбейтіндісін табуға болады. **189.** $0,5c^2(d^2 - 1)$. **190.** а) 2,8 см, 6,4 см; ә) $1\frac{4}{21}$ дм, $\frac{20}{21}$ дм; б) 5 см, 8 см; в) $\frac{c}{2}$, $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; 0,5. **191.** а) ≈ 48,2 см, ≈ 66,3 см; ә) ≈ 47,2 см, ≈ 40 см. **192.** 60°, 120°, 60°, 120°. **193.** а) ≈ 41°, ≈ 49°, $3\sqrt{85}$ см; ә) ≈ 39°, ≈ 51°, ≈ 42,2 см. **194.** а) $(30 + 6\sqrt{3})$ см; ә) ≈ 10,9 см; ≈ 8,3 см. **195.** ≈ 35,1 см. **196.** $10(\sqrt{3} + 1)$. **197.** а) 30, $6\sqrt{5}$, $12\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузаға жүргізілген медианасының қасиетін және оның биіктігінің қасиетін пайдаланыңдар (16 т., 2-есеп). ә) ≈ 6,2 дм; б) ≈ 48 м. **198.** ≈ 50°. **199.** ≈ 68°, ≈ 112°, ≈ 37°, ≈ 143°. **200.** ≈ 1,3 см. **201.** 3,6 дм, 1,2 дм. **202.** 5 см, 4 см. Ромбтың AN диагоналінің қасиетін қолданыңдар. **204.** а) ≈ 63°; ә) ≈ 2,1 м. **205.** Болмайды. **206.** а) ≈ 4,433 км; ә) ≈ 16°. **207.** 90°, ≈ 37°; ≈ 53°. Төбелері шеңберлердің центрлері болатын үшбұрыштың тікбұрышты екенін көрсетіңдер. **208.** а) 1) 1; 2) 0. Тригонометриялық тепе-теңдіктерді қолданыңдар; ә) 1) нөлден кіші; 2) нөлден артық. **209.** а) 7,5 см;

ә) $\approx 39°$, $\approx 51°$. **210.** 1. Соңғы екі көбейткішті оларға тең котангенстің мәндерімен алмастырыңдар. **211.** 1А) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2А) 0,6; $\frac{4}{3}$; 4В) m; $m\sqrt{3}$; 5С) $4\frac{8}{13}$ см. **212.** а) Кері тұжырым дұрыс емес. **213.** а) 102-суретті қараңдар; ә) параллелограмның төбесін оған қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосыңдар. **214.** а) 26 м; ә) 6 см және 10 см; б) 18 см. **215.** а) 60 тақташа; ә) 400. **216.** 8 дм^2, 16 дм^2, 8 дм^2. **217.** а) $12{,}5\sqrt{3}$ дм^2; ә) 25 см^2; б) 24 см^2; в) 56 см. **218.** а) $12\sqrt{3}$ см^2; ә) $\approx$ 24,2 см^2. **219.** а) 16 парақ; ә) 340 см^2. **220.** а) 1 000 000 рет; ә) 6 км^2; б) 18 000 км^2. **221.** а) 337 %-ға; ә) 4 %-ға азаяды. **222.** а) 24 см^2. Үшбұрыштың катеттерінің оның гипотенузасы мен сүйір бұрыштары арқылы өрнектеп: $S = 50 \cdot \sin A \cdot \sin B$ аласыңдар. Синустардың көбейтіндісін табу үшін берілген теңдіктің екі жағын да квадраттаңдар және негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті қолданыңдар. ә) 27 см^2; б) $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ дм^2. DC кесіндісін AB қабырғасымен, мысалы, F нүктесінде, қиылысқанға дейін созыңдар. ΔCBF-тен FC, BF және оның ауданын табыңдар. Әрі қарай ΔADF-тен tg 60°-ты пайдаланып, AD-ны және оның ауданын табыңдар. Ізделінді аудан ΔADF пен ΔCBF аудандарының айырымына тең болады. **223.** а) 10 см; ә) 6 дм немесе $2\frac{2}{3}$ дм; б) 15 см; в) егер $k > n$ болса, үшбұрыштың ауданы үлкейеді, егер $k < n$ болса, кішірейеді, ал егер $k = n$ болса, өзгермейді. **224.** а) 1) 48 см^2; 2) 108 см^2; ә) 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 4) $3r^2\sqrt{3}$. **225.** а) 15 дм^2; ә) 13,5 дм^2. **226.** а) $40\sqrt{3}$; ә) $\frac{128}{\sqrt{3}}$. **227.** а) 12,5 см^2; ә) $72\sqrt{3}$ см^2. **228.** а) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ теңдігін қолданыңдар; ә) шаршы. **230.** а) Егер $\frac{AM}{MC} = \frac{2}{3}$ болса, онда $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta CBM} = 2 : 3$ болатынын дәлелдеңдер. ә) 12 см^2; б) 6 дм^2. **231.** а) 120 м^2; ә) 4. **232.** а) $4\frac{8}{13}$ см; ә) 7,2 см^2. **233.** а) $3\sqrt{2}$ см, $3(1 + \sqrt{3})$ см, $4{,}5(1 + \sqrt{3})$ см^2; ә) 120 см^2, үшбұрыштың түрін анықтаңдар. **234.** а) $\frac{25\sqrt{2}}{16}$ дм^2; ә) 67,5 см^2 немесе $45\sqrt{6}$ см^2. **235.** а) 8 см; ә) бар болады, себебі үлкен қабырғасы басқа екі қабырғасының қосындысынан кіші. **236.** $12\sqrt{3}$ см^2. **237.** $\frac{Pd}{2}$. **238.** Бар болады, мысалы, қабырғасы 0,9 см болатын теңқабырғалы және табаны 200 см, биіктігі 0,002 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш. **239.** а) *ABCD* параллелограмы берілген болсын, *BD* диагоналін жүргізіңдер және үшбұрыштардың әрқайсысын үш тең шамалас үшбұрышқа бөліңдер (*AD* және *DC* қабырғаларын бөлу арқылы), сонда бір үшбұрыштың 2 бөлігі және параллелограмның қалған 4 бөлігі ізделінді көпбұрышты құрайды. **240.** а) 22,4 дм^2; ә) 27 см^2. **241.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **242.** 15 см. **243.** Ромб, 120 см^2. **244.** 45 см^2. Берілген төртбұрыш ромб екенін, ал трапецияның орта сызығы мен биіктігі оның диагональдары болатынын дәлелдеңдер. **245.** 54 см^2. *C* нүктесі арқылы $CE \parallel BD$ жүргізіңдер (*E* нүктесі *AD* түзуінде жатады), *ACE* үшбұрышының түрін анықтаңдар. Трапецияның ауданы ΔACE-ның ауданына тең екенін дәлелдеңдер. **246.** 4 см, $4\sqrt{3}$ см. **247.** а) 60,5 см^2; ә) 4,5 дм^2. **248.** а) $0{,}5d^2$. **249.** $0{,}5d^2$. Үлкен табаны *AD* болатын *ABCD* трапециясының *AC* және *BD* диагональдарын жүргізіңдер, *O* олардың қиылысу нүктесі болсын. *AOD* үшбұрышының түрін анықтаңдар. **250.** а) 552,25 га; ә) қабырғаларын және қарсы жатқан екі бұрышын өлшеуге болады. **251.** а) $192\sqrt{3}$ см^2; ә) $(24+4\sqrt{2})$ дм, 40 дм^2. **252.** а) 56 см^2; ә) $15\sqrt{3}$ см^2. **253.** а) $S = ch$; ә) $60\sqrt{2}$ см^2. **254.** а) 96 м^2; ә) 1300 га. **255.** а) 174 дм^2; ә) 144 см^2. **256.** а) 128 см^2. $AD = 20$ см, $BC = 12$ см және $AC \perp CB$ болатын *ABCD* трапециясы берілсін, *CH* – трапецияның және тікбұрышты *ACD* үшбұрышының биіктігі. Тікбұрышты үшбұрыштың биіктігінің қасиетін қолданыңдар: ол гипотенузаны бөлетін кесінділердің орта пропорционалы болады (2-есеп, 16 т.); немесе, $\angle ADC = \angle ACH$ екенін дәлелдеңдер және осы бұрыштың тангенстерін өрнектейтін теңдік жазыңдар. **257.** а) Трапецияның диагональдарын жүргізіңдер және олардың қиылысу нүктесі арқылы биіктік түсіріңдер, пайда болған тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыштардың қасиеттерін пайдаланыңдар; ә) 64 см^2; б) B мен C төбелерінен AD қабырғасына жүргізілген перпендикулярлардың тең екенін дәлелдеңдер. **258.** $12\sqrt{3}$ см^2. Осы трапецияның өзара тең үш теңқабырғалы үшбұрыштардан тұратынын көрсетіңдер. **259.** а) 253 а) тапсырманы шешкенде шыққан нәтижені пайдаланыңдар. Ізделінді түзу трапецияның орта сызығының ортасы арқылы өтеді. Мұндай түзулерді көп салуға болады; ә) Үшбұрыштардың аудандарын қиылған үшбұрыш пен трапецияның аудандарының қосындысы ретінде қарастырыңдар. DF пен EO-ны, мысалы, x пен y деп белгілеп алыңдар. **260.** а) $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ см; ә) $\frac{ab}{4}$. D нүктесінің үшбұрыштың сыртында жататынын анықтаңдар (себебі, BD биссектрисасы AC қабырғасын оған іргелес қабырғаларға пропорционал кесінділерге бөледі, ал $AB > BC$) және ΔDBC-ның BC биіктігіне DH перпендикулярын тұрғызыңдар. **261.** а) 9,6 см; ә) 12 см. **262.** а) $50(3\sqrt{2} - 1)$ дм^2; ә) $\frac{a^2 - b^2}{4}$ tg β. **263.** Галапагос қорығы 21 есе үлкен. **264.** а) $\frac{h^2}{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$; ә) $\frac{5\sqrt{39}}{8}$ см. **265.** 48 см^2. **266.** а) 54 см^2; ә) $\approx 17{,}6$ см^2. **267.** 11,52 дм^2. Тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарын x және $2x$ арқылы белгілеп, ACB және ADE үшбұрыштарынан tg A-ны өрнектеп, теңдік құрыңдар. **268.** $\approx 16{,}3$ см^2. **269.** ә) $5\sqrt{3}$ см. **270.** а) 18 см^2. O медианалардың қиылысу нүктесі болсын, AO, CO кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар және ΔAOC-ның ауданын есептеңдер, сосын 269, а-есептің шешімін пайдаланыңдар. ә) $d^2(7\sqrt{3} + 12)$. **271.** а) 1) Трапецияның төбесін оған қарсы жатқан бүйір қабырғасының ортасымен қосыңдар; 2) бүйір қабырғасының ортасынан трапецияның басқа бүйір қабырғасына параллель болатын түзу жүргізіңдер. ә) Алдымен, егер берілген M нүктесі ізделінді кесіндінің ортасы болса, онда ABC үшбұрышының ауданы AB_1C_1 үшбұрышының ауданынан кіші болады, мұндағы B_1C_1 – M нүктесі тиісті болатын, ұштары бұрыштың қабырғаларында жататын кесінді. Ол үшін B нүктесі арқылы $BD \parallel AC$ түзуін жүргізіңдер, сонда ΔAB_1C_1 ауданы ΔABC-ның ауданынан, ΔBB_1D ауданына тең мөлшерде үлкен болады (егер B нүктесі A және B_1 нүктелері арасында жатса). M нүктесінде қақ бөлінетін BC кесіндісін салу үшін параллелограмның диагональдарының қасиетін пайдаланыңдар. AM сәулесін жүргізіп, оған $MA_1 = AM$ кесіндісін белгілеңдер. Әрі қарай A_1 нүктесі арқылы берілген бұрыштың қабырғаларына параллель A_1B және A_1C түзулерін жүргізіңдер. **272.** 1А) Шаршының қабырғасы 6 см; 2А) 8 см^2; 3В) 6 дм^2; 4В) 16 см^2; 5С) алдымен, ABD және ACD үшбұрыштары тең шамалас екенін дәлелдеңдер. **273.** а) 1) (–3; –5); 2) (3; –5); 3) (–3; 5); ә) ±8. **274.** 1219 жылы. **275.** а) 10; ә) 5; б) $5\sqrt{5}$. **276.** а) 15; ә) берілген кесіндіге орта перпендикуляр тұрғызыңдар. **277.** $B(-4; -4)$. **278.** а) (1; –1). **279.** а) (2,5; 0); ә) $\left(-4\frac{1}{3}; -9\frac{1}{6}\right)$. **280.** $\sqrt{53}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{89}$. **281.** (0; –2). **282.** а) $AB = AC + CB$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер. **283.** а) (–3; 0); ә) (5; 5) немесе (5; –5). **284.** 10. **285.** $M(5; 3)$, $N(2; 2)$. **286.** а) Мысалы, (–3; 7), (1; 1); ә) 1) $y = -(x-2)^2$; 2) $y = (x+2)^2$. **288.** а) $y = -2$; ә) $x = 1$. **289.** Берілген теңдеулерді $y = kx + p$ түрге келтіріңдер. **290.** а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$; ә) $y = -x + 3$. **291.** а) 1) $10x - 9y = 0$; 2) $5x + 2y - 17 = 0$; ә) 345. **292.** $y = \frac{1}{2}x - 2$. **293.** $2x - 5y + 4 = 0$, $4x - y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$. **294.** а) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; ә) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. **295.** а) $y = -x + 4$; ә) $y = x - 2$. **296.** $-4x + 4y - 5 = 0$ немесе $4x - 4y + 3 = 0$. **297.** а) (–2; 0), $R = 3$; ә) (0; 4), $R = 2\sqrt{2}$; б) (5; –7), $R = 4$. **298.** ә) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$. **299.** а) $x^2 + y^2 = 100$; ә) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 = 15{,}21$. **300.** ә), б), г). **301.** а) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$; ә) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. **302.** а) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$. **303.** а) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$; ә) екі. **304.** а) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 13$, Oy осімен (0; 3), (0; 7) нүктелерінде қиылысады және Ox осімен қиылыспайды; ә) $(x+0{,}5)^2 + (y-2)^2 = 6{,}25$, (–0,5; –0,5) және (–0,5; 4,5). **305.** а) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$; ә) $x^2 + (y-3)^2 = 36$. **306.** а) 1; ә) 0,5. **307.** а) $(a-b)^2$; ә) b^2. **308.** а) –0,5; ә) 1,5. **310.** а) Болады; ә) болмайды. **312.** а) ≈ 0,342; ә) ≈ –0,643; б) ≈ –0,839. **313.** а) ≈ 11° немесе ≈ 169°; ә) ≈ 127°; б) ≈ 158°; в) ≈ 55°. **314.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) 0; б) 0,5.

315. а) 1 немесе –1; ә) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ немесе $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0,5 немесе –0,5. **316.** а) 0; ә) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{3}{4}$. **317.** 105° немесе 15°. **318.** ≈ 0,94. **319.** ≈ –0,26. **320.** а) –0,75; ә) 0,8. **322.** $(x + 4)^2 + y^2 = 16$. **323.** $x^2 + (y - 1)^2 = 8$. **324.** (–3; 3). Сызуды орындаңдар. **325.** а) $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$; ә) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 8$. **326.** $D(c - a; d - b)$. **327.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ә) $-\sqrt{3}$. **328.** a және b тіктөртбұрыштың қабырғалары болсын және координаталар жүйесін енгізіп, тіктөртбұрыштың төбелерінің координаталарын a және b арқылы белгілеңдер. $M(x; y)$ нүктесінің координаталарын белгілеп және екі нүктенің арақашықтығының формуласын пайдаланып, берілген теңдіктің дұрыстығын анықтаңдар. **329.** a және b параллелограмның қабырғалары, ал α оның сүйір бұрышы болсын. Параллелограмның бір төбесі координата басында, ал қабырғаларының бірі Ox осінде жататындай координаталар жүйесін енгізіңдер. Параллелограмның төбелерінің координаталарын a және b, бұрышын α арқылы белгілеңдер (мысалы, егер $OABC$ параллелограмы берілсе, онда $O(0; 0)$, $A(a \cdot \cos\alpha; a \cdot \sin\alpha)$, $B(a \cdot \cos\alpha + b; a \cdot \sin\alpha)$, $C(b; 0)$). Екі нүктенің арақашықтығының формуласын пайдаланып, $AC^2 = OB^2$ теңдігін құрыңдар. Бұл теңдіктен $\cos\alpha = 0$ шығады, олай болса, $\alpha = 90°$ болатынына көз жеткізіңдер. **330.** 30 т. 1-есебінен шыққан салдарды қолдануға болады немесе BM медианасын созыңдар және $MD = BM$ кесіндісін салыңдар, сонда $ABCD$ параллелограмм болады. AC қабырғасы Ox осінде, ал M нүктесі координатаның бас нүктесінде жататындай координаталар жүйесін енгізіңдер. ABC үшбұрышының қабырғаларын ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) және BM сәулесі мен Ox осінің арасындағы сүйір бұрышты (мысалы, α) белгілеңдер. A, B, C, D, M нүктелерінің координаталарын a, b, c арқылы және бұрышын α арқылы өрнектеңдер. Содан кейін, екі нүктенің арақашықтығының формуласын пайдаланып, берілген теңдіктің дұрыстығын көрсетіңдер. **331.** 1A) 1), 2), 5), 6); 2A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 61$, $\sqrt{2}$;

4B) мысалы, диагональдарының орталары беттесетінін, диагональдары тең және көршілес екі қабырғасы тең екенін дәлелдеңдер.

5C) центрі $C(2; 0)$ нүктесі және радиусы 2 болатын шеңбер салыңдар, шеңбердің центрін A нүктесімен қосып, AC кесіндісінің шеңбермен қиылысу нүктесін табыңдар; **336.** а) 150 $см^2$; ә) 811,2 $см^2$. $ABCD$ ромб берілсін, O – диагональдарының қиылысу нүктесі, OK – тікбұрышты AOD үшбұрышының биіктігі, ол ромбтың биіктігінің жартысына тең. а) Ромбтың қабырғасын табу үшін AOK және AOD үшбұрыштарынан OAD бұрышының косинусын тауып, пропорция құрыңдар. ә) Ромбтың биіктігін табу үшін, AOD және KOD үшбұрыштарынан ODK бұрышының синусын тауып, тікбұрышты AOD үшбұрышының OK биіктігін табыңдар. **338.** $\sqrt{2}$. **340.** а) ≈ 202 $дм^2$; ә) ≈ 633 $дм^2$. **342.** а) 48 $см^2$; ә) 24 $см^2$. Үлкен қабырғасына биіктік түсіріңдер және оның осы қабырғаны бөлгенде пайда болған кесінділерін белгілеңдер (x және $15 - x$); пайда болған үшбұрыштардың әрқайсысының биіктіктерінің квадраттарын тауып, теңдеу құрыңдар... **343.** $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$, $\angle D = 60°$. **344.** $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, 6. **346.** 1,5 см, 7,5 $см^2$. **347.** 25 $см^2$. **348.** а) $16\sqrt{3}$ $см^2$; ә) шаршы, неге екенін түсіндіріңдер. **349.** 4 дм. **351.** 32 см, $32\sqrt{3}$ $см^2$. **353.** 60°, 120°, 120°, 60°. $AC \perp CD$ және AC түзуі A бұрышының биссектрисасы болатын $ABCD$ трапециясы берілген болсын. $\angle D = \alpha$ деп белгілеңдер, ACB бұрышын, біріншіден биссектрисаның қасиетін, екіншіден трапецияның CD қабырғасына іргелес бұрыштардың қосындысының қасиетін пайдаланып, теңдік құрыңдар. **358.** а) 12 см; ә) 19,2 см. **359.** $0{,}5\sqrt{26}$. **360.** 12,5. Үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарын тауып, оның түрін анықтаңдар; ә) 150 $см^2$. Тік бұрышы C болатын ABC үшбұрышының CD биіктігін табу үшін A және DCB бұрыштарының тангенсін тауып, пропорция құрыңдар. **361.** ә) 8; б) $\approx 6{,}4 \cdot 10^9$ $м^2$. **362.** $\frac{3}{4}$. **363.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) 6 см. **364.** а) $3\sqrt{3}$ $см^2$; ә) $9\sqrt{3}$ $см^2$. **365.** 6 см, $9\sqrt{2}$ $см^2$. **366.** Параллелограмның қасиеттері мен белгілерін пайдаланыңдар. **367.** Тіктөртбұрыш, неге екенін түсіндіріңдер. **368.** Алдымен, тіктөртбұрыш диагональдары арқылы бөлгенде пайда болған әрбір үшбұрышты 3 тең шамалас үшбұрыштарға бөліңдер. **370.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2. Бұрыштың биссектрисасының белгісін пайдаланып (егер нүкте бұрыштың қабырғаларынан бірдей қашықтықта жатса, онда ол биссектрисада жатады), $ABOC$ төртбұрышының ромб екенін дәлелдеңдер, мұндағы ABC – берілген үшбұрыш, O – шеңбердің центрі. **371.** X үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесі болатынын дәлелдеңдер. **372.** Осы нүктені үшбұрыштың төбелерімен қосыңдар және пайда болған үшбұрыштардың аудандарының қосындысын берілген үшбұрыштың ауданымен салыстырыңдар. **373.** ә) 30 см^2. **374.** Мүмкін емес. $\sin A + \sin B = 1$ болсын, теңдіктің екі жағын да квадраттап, негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті пайдаланыңдар. **375.** 1A) $S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}ch$; 2A) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$; 3B) берілген төртбұрыштың диагоналін жүргізіңдер және оның қабырғаларының орталары төбелері болатын төртбұрыштың параллелограмм болатынын дәлелдеңдер; 4B) 7,5; 5C) $\approx 6{,}9\ a$.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

Ауданы 114, 115
- шаршының 115
- көпбұрыштың 114
- параллелограмның 120
- тіктөртбұрыштың 115
- ромбтың 120
- трапецияның 129
- үшбұрыштың 121

Ауданның аксиомалары 114

Белгілері
- шаршының 46
- параллелограмның 34
- тіктөртбұрыштың 39
- ромбтың 42
- трапецияның 50

Белгілері
- шеңберге жанаманың 11
- параллель түзулердің 7
- үшбұрыштар теңдігінің 9
- тікбұрышты үшбұрыштар теңдігінің 9
- теңбүйірлі үшбұрыштың 10

Биіктік
- параллелограмның 120
- трапецияның 129
- үшбұрыштың 120

Бұрыштар
- көпбұрыштың 22
- төртбұрыштың 22

Бұрыштың биссектрисасы 12
- үшбұрыштың 8

Градустық өлшем
- доғаның 11
- центрлік бұрыштың 11

Жазықтықтағы сызықтардың теңдеулері 144
- түзудің 144
- шеңбердің 149

Көпбұрыш 21
- дөңес 21
- дөңес емес 22

Көпбұрыштың периметрі 22

Нүктенің абсциссасы 139

Нүктенің координаталары 139
- кесіндінің ортасының 140

Нүктенің ординатасы 139

Орта сызық
- трапецияның 66
- үшбұрыштың 62

Параллелограмм 28

Пропорционал кесінділер 57

Ромб 28

Сүйір бұрыштың косинусы 81
- котангенсі 91
- синусы 90
- тангенсі 91

Сынық сызық 21

Сынық сызықтың төбесі 21
- көпбұрыштың 21

Сынық сызықтың буындары 21

Теорема
- пропорционал кесінділер туралы 57
- Пифагор теоремасы 84
- Фалес теоремасы 55

Төртбұрыш 22

Трапеция 28
- тікбұрышты 28
- теңбүйірлі 28
Трапецияның табаны 28
Тригонометриялық тепе-теңдіктер 100
Тікбұрышты үшбұрыштың гипотенузасы 10
Тікбұрышты үшбұрыштың катеті 10
Тіктөртбұрыш 28
Үшбұрыштың бұрыштарының қосындысы 8
- көпбұрыштың сыртқы бұрыштарының 23
Үшбұрыштың сыртқы бұрышы 9
- көпбұрыштың 23
Үшбұрыштың тамаша нүктелері 71
Фигуралар
- тең 114
- тең шамалас 115
- тең құрамдас 115
- түзуге қарағанда симметриялы 43
Циркуль мен сызғыштың көмегімен төртбұрыш салу 53
Шаршы 28, 46
Шеңбердің центрі
- үшбұрышқа іштей сызылған 12
- үшбұрышқа сырттай сызылған 12
Шеңбердің жанамасы 11

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ ТІЗІМІ

1. Барчунова Ф. М., Колягин Ю. М., Ройтман П. Б. 8-кластағы геометрия сабақтары. Бірінші және екінші жарты жыл. Мұғалімдерге арналған құрал. – Алматы: Мектеп, 1976.

2. Закарин А. Абель. Галуа. Лобачевский. Эйнштейн: Математика ғалымдарының өмірі мен ғылыми еңбектері. – Алматы: Қазақстан, 1968.

3. Қаниев С. Математикадан конкурстық есептер. – Алматы: Мектеп, 1975.

4. Математикадан конкурстық есептер жинағы: Жоғары техникалық оқу орындарына түсетіндерге арналған. – Алматы: Мектеп, 1985.

5. Тасболатова Р. Планиметрия есептері. Жалпы білім беретін орта мектептің жоғары сынып оқушылары мен математика пәні мұғалімдеріне арналған оқу құралы. – Респ. баспа кабинеті, 2000.

6. Оқушы анықтамасы. Математика. 5–11-сыныптар. – Павлодар, 2005.

7. Перельман Я. И. Жанды математика. Математикалық әңгімелер мен қыңыр есептер. – Алматы: Мектеп, 1978.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. Қазақстан Республикасы Қарулы күштерінің әскери-тарихи мұражайы – 20 б.
2. «Астана Опера» мемлекеттік опера және балет театры – 80 б.
3. Биік таудағы «Медеу» спорт кешені – 113 б.
4. Байқоңыр ғарыш айлағынан «Протон-М» зымыранын ұшыру – 138 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

Жалпы білім беретін мектептің
8-сынып оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ
+ CD

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Суретші	А. Б. Жусупов
Техникалық редакторы	Б. К. Еслямов
Дизайны	Б. К. Еслямов
	Н. В. Лузгарёва
Мұқаба дизайны	Е. Е. Велькер
Корректоры	А. С. Есқара

Басуға 05.07.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі 70×100 1/16. Көлемі 17,55 шартты баспа таб.
Тапсырыс № 3291. Таралымы 1000 дана.

Коды 513018

«Келешек-2030» ЖШС
Қазақстан Республикасы,
020000, Көкшетау қ.
Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (қабылдау бөлімі),
8 (7162) 44-18-74, +7 708 444 18 74,
ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz

«Можайский полиграфический комбинат» ААҚ-да басылып шығарылған
143200, Можайск қ-сы, Мир к-сі, 93
www.oaompk.ru, тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685